Ponteiros do relógio

Há dias em que olhamos para o relógio vezes sem conta, claro que o objetivo será ver as horas, mas também podemos ver mais do que horas!! Que tal analisar os ângulos formados pelos ponteiros das horas e minutos?

Neste desafio proponho aos mais curiosos que descubram quantas vezes, durante um dia, os dois ponteiros formam um ângulo de 90º.

Será o leitor também capaz de descobrir as horas a que acontece?

Resolução

Comecemos por analisar quando os dois ponteiros estão sobrepostos, às 0 h. Entre as 0h e a 1h existem 2 posições onde os ponteiros fazem um ângulo de 90º e esta situação repete-se em todas as horas à exceção das 2h e 3h, quem têm um momento em comum, as 3h. Desta forma poderemos concluir que o mesmo acontece às 9h. Assim, em metade do dia os ponteiros fazem um ângulo de 90º 22 vezes $\left(12\times 2-2\right)$, significando então que durante um dia esta situação ocorre 44 vezes.

Para verificar quais as horas exatas a que acontecem estes momentos é importante perceber que o ponteiro dos minutos demora 60 minutos a voltar à posição inicial, o que significa que a sua velocidade é de 6º/min, já o ponteiro das horas demora 720 minutos (12 horas) a dar uma volta completa, o que faz com que a sua velocidade seja de 0,5º/minuto.

Partindo da posição em que são 0h (ou 12h) até à 1h (ou 13h), a amplitude entre os dois ponteiros pode ser escrita por:

$$A = 6t - 0{,}5t$$

Como procuramos o exato momento em que os dois ponteiros formam 90º, fazendo a substituição $A = 90$, obtemos o valor $t = \frac{180}{11}$. Significa que passados $\frac{180}{11}$ minutos desde as 0h os ponteiros formam um ângulo de 90º. Durante essa mesma hora há outro momento que temos de considerar, que acontece quando $A = 270$ e nesse caso $t = \frac{540}{11}$.

Para determinar os momentos em que acontece o mesmo ente a 1h (ou 13h) e as 2h (ou 14h), a equação será:

$$A = 6t - \left(30 - 0{,}5t\right)$$

Utilizando o mesmo raciocínio podemos obter as horas exatas dos restantes momentos.

No quadro seguinte podemos ver as horas exatas, na primeira parte do dia, em que os ponteiros fazem 90º entre si e a respetiva hora aproximada.

Hora exata	*Hora aproximada*
0h e $\frac{180}{11}$min	0h e 16min
0h e $\frac{540}{11}$min	0h e 49min
1h e $\frac{240}{11}$min	1h e 22min
1h e $\frac{600}{11}$min	1h e 55min
2h e $\frac{300}{11}$min	2h e 27min
3h	3h
3h e $\frac{360}{11}$min	3h e 33min
4h e $\frac{60}{11}$min	4h e 5min
4h e $\frac{420}{11}$min	4h e 38min
5h e $\frac{120}{11}$min	5h e 11min
5h e $\frac{480}{11}$min	5h e 44min

Hora exata	*Hora aproximada*
6h e $\frac{180}{11}$min	6h e 16min
6h e $\frac{540}{11}$min	6h e 49min
7h e $\frac{240}{11}$min	7h e 22min
7h e $\frac{600}{11}$min	7h e 55min
8h e $\frac{300}{11}$min	8h e 27min
9h	9h
9h e $\frac{360}{11}$min	9h e 33min
10h e $\frac{60}{11}$min	10h e 5min
10h e $\frac{420}{11}$min	10h e 49min
11h e $\frac{120}{11}$min	11h e 11min
11h e $\frac{480}{11}$min	11h e 44min