

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

11 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

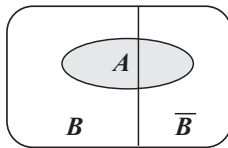
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

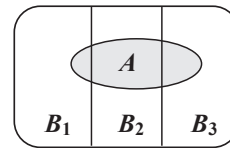
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

A rádio OnOff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

1. Para a eleição da atual direção da rádio OnOff, composta hierarquicamente por um diretor, um vice-diretor e um adjunto da direção, apresentaram-se três candidatos: António, de 27 anos de idade, Bernardo, de 32 anos, e Carla, de 29 anos.

Nesse ato eleitoral, foram apurados 375 votos validamente expressos. No boletim de voto, cada votante escreveu, por ordem decrescente de preferência, o nome dos três candidatos.

A Tabela 1 apresenta as três listas ordenadas de preferências estabelecidas pelos eleitores e o número de votos obtido por cada uma das listas.

Tabela 1

N.º de votos	125	160	90
Preferências			
1.^a	António	Bernardo	Carla
2.^a	Bernardo	Carla	António
3.^a	Carla	António	Bernardo

Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a composição da atual direção.

- São atribuídos pontos a cada um dos candidatos em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada candidato recebe:
 - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
 - três pontos por cada voto na segunda preferência;
 - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos. O mais pontuado é eleito para diretor, o segundo mais pontuado é eleito para vice-diretor, e o terceiro mais pontuado é eleito para adjunto da direção.

No caso de existirem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate. Dos candidatos empatados, o mais velho assumirá o cargo de maior importância.

Indique os nomes dos atuais diretor, vice-diretor e adjunto da direção, aplicando o método acima descrito.

- * 2. Num outro ato eleitoral realizado na rádio OnOff, apenas uma parte dos 480 eleitores inscritos votou. Finalizada a votação, apenas 75% dos votos foram considerados validamente expressos, por se ter considerado que 96 dos votos recolhidos não eram válidos.

Qual foi a taxa de abstenção registada nesse ato eleitoral?

- (A) 28% (B) 12,5% (C) 10% (D) 20%

* 3. No dia em que a rádio OnOff comemorou o seu quinto aniversário, foi organizado um concurso cujo prémio era um conjunto promocional da Banda YY. O conjunto promocional era constituído por um bilhete para um concerto, uma camisola autografada pelos elementos da banda e um CD.

O vencedor do concurso, dono de uma pequena empresa, ofereceu o prémio aos seus três funcionários, a Dora, a Elsa e o Fernando, e, atendendo à antiguidade dos mesmos na empresa, decidiu que o prémio seria repartido entre eles da seguinte forma: a Dora ficaria com 50% do prémio, a Elsa com 30% e o Fernando com 20%.

Como não chegavam a acordo quanto à forma de distribuir os bens do prémio, os três funcionários decidiram partilhá-los utilizando o método seguinte.

- 1.^a etapa: Cada funcionário atribui um valor monetário a cada um dos bens do prémio, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações dos três funcionários.
- 2.^a etapa: Determina-se a soma das licitações atribuídas ao prémio por cada funcionário, designada valor global, e o valor que cada funcionário considera justo receber, designado porção justa. A porção justa obtém-se, para cada funcionário, através de uma proporção direta entre a percentagem que lhe coube na repartição do prémio e o valor global.
- 3.^a etapa: Cada bem é atribuído ao funcionário que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um funcionário não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o valor dos bens recebidos por esse funcionário é zero.
- 4.^a etapa: Se o valor dos bens recebidos por um funcionário for superior à porção justa por si determinada, apura-se o excedente. Caso contrário, apura-se o défice.
- 5.^a etapa: (Só é aplicada quando existe dinheiro em excesso.) O excesso irá corresponder à diferença entre o valor total do excedente e o valor total do défice. Este excesso é distribuído a cada funcionário na proporção direta que lhe coube na repartição do prémio.

Na Tabela 2, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada um dos funcionários a cada um dos bens.

Tabela 2

	Dora	Elsa	Fernando
Bilhete	40 €	34 €	36 €
Camisola	20 €	22 €	26 €
CD	26 €	34 €	28 €

Determine a partilha final do prémio pelos funcionários, aplicando o método descrito, de modo que nenhum dos funcionários tenha razão para reclamar.

Na sua resposta, apresente:

- o valor global atribuído ao prémio por cada funcionário;
- a porção justa para cada funcionário;
- a atribuição dos bens aos funcionários;
- o valor a pagar ou a receber por cada funcionário;
- o valor que cada funcionário receberá do excesso, caso exista valor em excesso;
- a partilha final do prémio.

4. De modo a garantir o isolamento acústico entre os diferentes espaços onde funciona a rádio OnOff, cada uma das portas de ligação irá ser calafetada.

Na Figura 1, apresenta-se uma planta em que estão representados os diferentes espaços onde funciona a rádio OnOff: um pátio, uma receção e seis salas (S1, S2, S3, S4, S5 e S6).

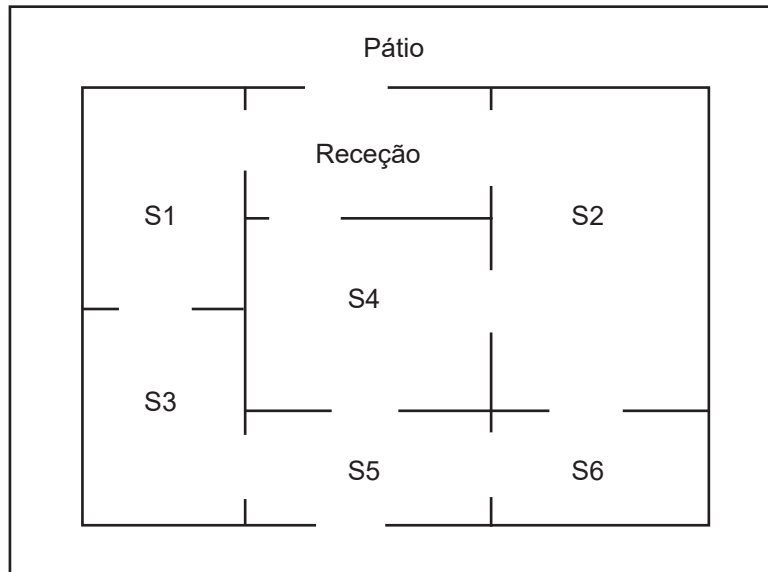


Figura 1

O responsável pela calafetagem das portas pretende definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez.

Justifique se é possível definir um percurso nas condições indicadas.

Na sua resposta, apresente um grafo que modele a situação descrita.

* 5. O departamento de compras da rádio OnOff vai adquirir novos equipamentos.

Para garantir o menor custo, o chefe do departamento analisou cada uma das duas alternativas seguintes.

Alternativa 1

Compra *online* a empresa nacional

Valor do equipamento – 4500 euros

Preço dos portes de acordo com a massa da encomenda

- 5 euros até 10 kg;
- 3 euros por cada 10 kg, após os primeiros 10 kg.

Por exemplo, se a encomenda tiver 14 kg, o preço a pagar pelos portes será 8 euros (5 euros pelos primeiros 10 kg, mais 3 euros pela massa acima dos 10 kg e não acima dos 20 kg).

Alternativa 2

Compra *online* a empresa estrangeira

Valor do equipamento – 4000 euros

Preço dos portes – $20 \times 1,03^n$, em que n é a massa da encomenda em quilogramas

Admita que a massa prevista da encomenda é 73 kg.

Indique qual das alternativas será, monetariamente, mais vantajosa.

Apresente todos os cálculos que efetuar.

Na sua resposta:

- apresente o custo da aquisição do equipamento para cada uma das alternativas, com arredondamento às centésimas;
- caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

6. No Dia Internacional da Saúde, a rádio OnOff lançou aos ouvintes o desafio seguinte: calcularem o seu índice de massa corporal (IMC) e de o enviarem para a rádio.

* 6.1. O diagrama de caule e folhas da Figura 2 apresenta o IMC dos primeiros 20 ouvintes que responderam ao desafio. No caule, consta o algarismo das dezenas e, nas folhas, o algarismo das unidades de cada registo.

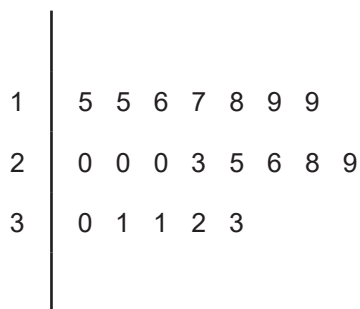


Figura 2

IMC (kg/m ²)	Classificação
<18,5	Baixo peso
de 18,5 a 24,9	Variação normal
de 25,0 a 29,9	Pré-obesidade
≥ 30,0	Obesidade

Figura 3

DGS, Programa Nacional de Combate à Obesidade, 17 de março de 2005, in www.dgs.pt (consultado em abril de 2021). (Adaptado)

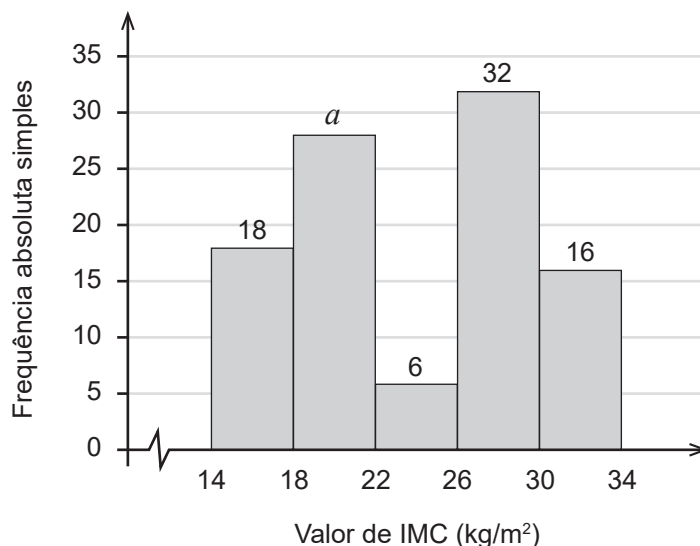
Qual é a percentagem dos 20 ouvintes considerados cujo IMC não pode ser classificado como variação normal?

- (A) 70% (B) 45% (C) 25% (D) 20%

6.2. Os programas da rádio com maior participação dos ouvintes foram «A sua tarde na OnOff» e «OnOff night».

As respostas recebidas durante a emissão do programa «A sua tarde na OnOff» apresentam-se no histograma de frequências absolutas simples, representado no Gráfico 1, organizadas nas classes [14, 18[, [18, 22[, ... , [30, 34[.

Gráfico 1

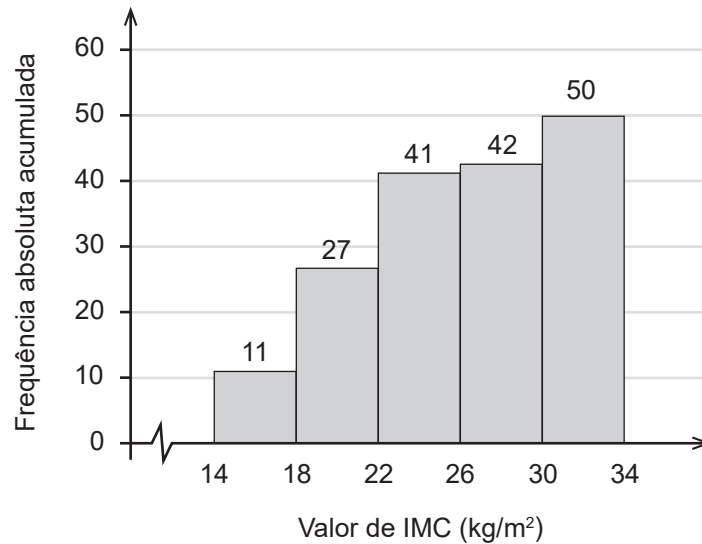


6.2.1. Admita que a média dos dados agrupados de IMC apresentados no Gráfico 1 é igual a 24.

Determine o valor de a .

6.2.2. As respostas recebidas durante a emissão do programa «OnOff night» apresentam-se no histograma de frequências absolutas acumuladas, representado no Gráfico 2, organizadas nas classes $[14, 18[$, $[18, 22[$, ... , $[30, 34[$.

Gráfico 2



Considere $a = 26$

Apresente uma tabela de frequências absolutas simples para o total das respostas recebidas durante a emissão dos programas «A sua tarde na OnOff» e «OnOff night».

Na sua resposta, mantenha as classes utilizadas em ambos os histogramas.

7. Desde que foi inaugurada, no início do ano 2000, a rádio OnOff tem cada vez mais ouvintes. Admita que, t anos após a sua inauguração, o número de ouvintes da OnOff é bem aproximado, com arredondamento às unidades, pelo modelo seguinte.

$$R(t) = 7700 + 1471 \ln(t + 1) \quad (t \geq 0)$$

- * 7.1. Prove que o número de ouvintes da rádio OnOff sofreu um aumento superior a 2500, decorridos cinco anos após a inauguração.

- 7.2. O número de ouvintes ultrapassou pela primeira vez a marca dos 12 000 num determinado ano. No início do ano seguinte, procedeu-se à atualização dos equipamentos.

Determine em que ano se procedeu à atualização dos equipamentos.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às décimas.

- * 8. Realizado um estudo junto dos funcionários da rádio OnOff, concluiu-se que:

- 80% dos funcionários trabalham a partir de casa;
- de entre os funcionários que trabalham a partir de casa, metade colabora em programas emitidos diariamente;
- 5% dos funcionários não trabalha a partir de casa e não colabora em programas emitidos diariamente.

Escolhe-se ao acaso um dos funcionários da rádio OnOff.

Determine a probabilidade de o funcionário selecionado colaborar em programas emitidos diariamente.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- * 9. O tempo diário, em minutos, durante o qual os ouvintes acompanham a emissão da rádio OnOff segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 40 minutos e desvio padrão 10 minutos.

Escolhe-se ao acaso um dos ouvintes da rádio OnOff.

Determine a probabilidade de esse ouvinte, num dia, acompanhar a emissão da rádio OnOff entre 50 minutos e uma hora.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

10. A rádio OnOff emite *podcasts* sobre temáticas variadas.

Para determinar intervalos de confiança para o número médio de *podcasts* emitidos por semana pela rádio OnOff, constituiu-se uma amostra com dados relativos a mais de 30 semanas.

* 10.1. Admita que o intervalo de confiança a 95% para o número médio de *podcasts* emitidos por semana é $]13,86; 14,5[$.

A margem de erro associada a este intervalo de confiança é igual a

- (A) 14,82 (B) 14,18 (C) 0,64 (D) 0,32

* 10.2. Admita que os dados da amostra correspondem a 100 semanas e que o número médio de *podcasts* emitidos por semana é igual a 12 e o desvio padrão é igual a 2,1.

Determine o intervalo de confiança a 90% para o número médio de *podcasts* emitidos por semana pela rádio OnOff.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	2.	3.	5.	6.1.	7.1.	8.	9.	10.1.	10.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	20	18	12	18	18	18	12	18	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.	4.	6.2.1.	6.2.2.	7.2.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					54				
TOTAL										200