Sucessões

- Uma sucessão de números reais é uma função definida por:

$$u: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$u \to u_n$$

- A sucessão (u_n) é estritamente crescente se cada termo é maior do que o termo anterior $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$
- A sucessão (u_n) é estritamente decrescente se cada termo é menor do que o termo anterior $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$

Sucessões limitadas

- Uma sucessão diz-se *limitada* quando o conjunto dos seus termos tem majorante e minorante, ou seja, quando é minorada ou majorada
- O número real *M* é *majorante* do conjunto dos termos da sucessão (u_n) se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < M$
- O número real *m* é *minorante* do conjunto dos termos da sucessão (u_n) se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > m$

Sucessões monótonas

- Uma sucessão (u_n) é *crescente* se cada termo é maior do que o anterior, isto é, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$
- Uma sucessão (u_n) é *decrescente* se cada termo é menor do que o anterior, isto é, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$

Uma sucessão (u_n) é *constante* se cada termo é igual ao anterior, isto é, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

Progressões aritméticas

- A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética se existir um número real *r*, tal que $u_{n+1} - u_n = r$
- *Termo geral da progressão aritmética* de razão *r* e primeiro termo u_1 é $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Se for conhecido o termo de ordem $k\,(k \in \mathbb{N})$, o termo geral pode ser escrito da forma $u_n = u_k + (n-k)r$
- Monotonia e limitação
  Se $r > 0$, (u_n) é crescente e não limitada
  Se $r < 0$, (u_n) é decrescente e não limitada
  Se $r = 0$, (u_n) é constante e limitada
- A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressões geométricas

- A sucessão (u_n) é uma progressão geométrica se existir um número real *r*, tal que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$
- *Termo geral da progressão geométrica* de razão *r* e primeiro termo u_1 é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$
- Se for conhecido o termo de ordem $k\,(k \in \mathbb{N})$, o termo geral pode ser escrito da forma $u_n = u_k \times r^{n-k}$
- Monotonia e limitação
  Se $0 < r < 1$ e $u_1 > 0$, (u_n) é decrescente e limitada
  Se $0 < r < 1$ e $u_1 < 0$, (u_n) é decrescente e limitada
  Se $r > 1$ e $u_1 > 0$, (u_n) é crescente e não limitada
  Se $r > 1$ e $u_1 < 0$, (u_n) é decrescente e não limitada
  Se $r = 1$, (u_n) é constante e limitada
  Se $-1 \leq r < 0$, (u_n) é não monótona e limitada
  Se $r < -1$, (u_n) é não monótona e não limitada
- A soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por $S_n = u_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

Infinitamente grandes

- Uma sucessão (u_n) diz-se um *infinitamente grande positivo* se, por maior que seja *M*, existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são maiores do que *M* $(u_n \to +\infty)$
- Uma sucessão (u_n) diz-se um *infinitamente grande negativo* se, por maior que seja *M*, existe uma ordem depois da qual todos os termos da sucessão são maiores do que *M* $(u_n \to -\infty)$

Operações com infinitamente grandes

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões

- Adição
  Se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to +\infty$, então $u_n + v_n \to +\infty$
  Se $u_n \to -\infty$ e $v_n \to -\infty$, então $u_n + v_n \to -\infty$
  Se (u_n) e (v_n) são infinitamente grandes de sinais contrários, o comportamento da sucessão $u_n + v_n$ tem de ser analisado caso a caso
- Multiplicação
  Se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to +\infty$, então $u_n \times v_n \to +\infty$
  Se $u_n \to -\infty$ e $v_n \to -\infty$, então $u_n \times v_n \to +\infty$
  Se $u_n \to +\infty$ e $v_n \to -\infty$, então $u_n \times v_n \to -\infty$
- Multiplicação
  O comportamento do quociente de duas sucessões, que seja uma sucessão, infinitamente grandes tem de ser analisado caso a caso

Infinitésimos

Uma sucessão (u_n) diz-se um *infinitésimo* se, qualquer que seja o número real positivo δ, é possível encontrar uma ordem que a partir da qual todos os termos da sucessão são, em módulo, inferiores a δ

Operações com infinitésimos

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões

- Adição
  Se $u_n \to 0$ e $v_n \to 0$, então $u_n + v_n \to 0$
- Multiplicação
  Se $u_n \to 0$ e $v_n \to 0$, então $u_n \times v_n \to 0$

Progressões

- Geométricas de razão *r*
  Se $r > 1$, a progressão é um infinitamente grande
    - positivo, se o primeiro termo for positivo
    - negativo, se o primeiro termo for negativo

  Se $|r| < 1$, a progressão é um infinitésimo
  Se $r = 1$, a sucessão é convergente, pois é constante
  Se $r < -1$, a progressão é um infinitamente grande
  Se $r = -1$, a sucessão toma alternadamente valores simétricos e não é convergente
- Aritméticas
  Toda a progressão aritmética de razão *r* maior do que 0 $(r > 0)$ é um infinitamente grande positivo
  Toda a progressão aritmética de razão *r* menor do que 0 $(r < 0)$ é um infinitamente grande negativo
  As progressões aritméticas só são convergentes se tiverem razão zero, isto é, se forem sucessões constantes

Teoremas

- Teorema 1
  Se (u_n) é um infinitamente grande positivo e se, a partir de certa ordem, $v_n \geq u_n$, então (v_n) é um infinitamente grande positivo
- Teorema 2
  Se (u_n) é um infinitamente grande positivo, então $(u_n + a)$ também é um infinitamente grande positivo, para qualquer número real *a*
- Teorema 3
  Se *b* é um número real positivo e (u_n) é um infinitamente grande positivo, então $(b \times u_n)$ é um infinitamente grande positivo
- Teorema 4
  O inverso de um infinitamente grande (sem termos nulos) é um infinitésimo
- Teorema 5
  O inverso de um infinitésimo (sem termos nulos) é um infinitamente grande
- Teorema 6
  Se (u_n) é um infinitésimo e se, a partir de certa ordem, $|v_n| \leq u_n$, então (v_n) também é um infinitésimo
- Teorema 7
  Se (u_n) é um infinitésimo, então $(k \times u_n)$ também é um infinitésimo, para qualquer número real *k*
- Teorema 8
  Uma sucessão convergente tem limite único
- Teorema 9
  Uma sucessão monótona e limitada é convergente
- Teorema 10
  Uma sucessão convergente é limitada