Generalidades sobres funções

Produto cartesiano de *A* por *B*

$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$, conjunto dos pares ordenados (a,b), em que *a* pertence a *A* e *b* pertence a *B*.

Gráfico de uma função

$G \subset A \times B$ é um gráfico de uma função de A em B quando e apenas quando para todo o $a \in A$ existir um e somente um elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in G$.

Restrição de uma função

Dados os conjuntos *A* e *B*, uma função $f : A \to B$ e um conjunto *C*, uma restrição de *f* a *C* é a função:

$$\begin{aligned} f|_C &: C \cap A \to B \\ &x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Função real de variável real

É uma função cujo domínio e conjunto de chegada estão contidos em $\mathbb{R}$

Domínio e conjunto de chegada

No caso de uma função real de variável real ser definida pela sua expressão algébrica, convencionou-se que o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$ e que o domínio é o conjunto dos números reais para os quais a expressão tem significado.

Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Seja a função $f : A \to B$,

- *f* é injetiva se e somente se:
  $$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ ou } \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
  Nota:
  Uma função *f* é não injetiva se e somente se $\exists x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$
- *f* é sobrejetiva se e somente se para todo o *y* pertencente a *B*, existir um elemento *x* pertencente a *A* tal que $y = f(x)$, ou seja, têm de coincidir os conjuntos de chegada e contradomínio $(D'_f = B)$
- *f* é bijetiva se *f* é injetiva e sobrejetiva

Função composta

Dadas as funções $g : D_g \to A$ e $f : D_f \to B$, a função composta de *f* com *g* é a função $fog : D_{f \circ g} \to B$, tal que:

- $D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$
- $\forall x \in D_{f \circ g}, (f \circ g)(x) = f(g(x))$

Função inversa

Dada a função $f : A \to B$, bijetiva de *A* em *B*, a função inversa de *f* é dada por $f^{-1} : B \to A$, tal que $\forall y \in B, f^{-1}(y)$ é o único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

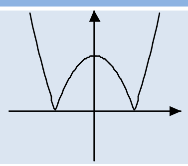
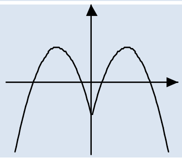
Relação entre as funções *f* e f^{-1}

- Os gráficos das funções *f* e f^{-1} são imagem um do outro pela reflexão axial cujo eixo é a reta de equação $y = x$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

Paridade de uma função

- *f* é uma função par se e somente se $\forall x, -x \in D_f, f(x) = f(-x)$
- *f* é uma função ímpar se e somente se $\forall x, -x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

Transformações do gráfico de uma função

No eixo Oy			
Deslocamentos	$f(x)+a$	$\uparrow \ \downarrow$	Translação vertical associada ao vetor $(0,a)$ $D = D_f$
Dilatações/ Compressões	$af(x)$	$\uparrow \ \downarrow$ $\downarrow \ \uparrow$	Contração na vertical de coeficiente a, se $0 < a < 1$ Dilatação na vertical de coeficiente a, se $a > 1$ $D = D_f$
Simetrias	$-f(x)$	$\Updownarrow$	Simetria em relação ao eixo Ox $D = D_f$
No eixo Ox			
Deslocamentos	$f(x-a)$	$\rightarrow$ $\leftarrow$	Translação horizontal associada ao vetor $(a,0)$ $D = \left\{x+a : x \in D_f\right\}$
Dilatações/ Compressões	$f(ax)$	$\rightarrow \ \leftarrow$ $\leftarrow \ \rightarrow$	Contração na horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $a > 1$ Dilatação na horizontal de coeficiente $\frac{1}{a}$ se $0 < a < 1$ $D = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$
Simetrias	$f(-x)$	$\Leftrightarrow$	Simetria em relação ao eixo Oy $D = \left\{-x : x \in D_f\right\}$
Módulos			
$\lvert f(x) \rvert$			Mantém os pontos de ordenada não negativa e efetua uma simetria dos pontos de ordenada negativa relativamente ao eixo Ox $D = D_f$
$f(\lvert x \rvert)$			Mantém os pontos de abcissa não negativa e efetua uma simetria dos mesmos relativamente ao eixo Oy $D = \left(D_f \cap \mathbb{R}_0^+\right) \cup \left\{-x : x \in D_f \cap \mathbb{R}_0^+\right\}$

Monotonia, extremos e concavidades de uma função

Dada uma função real de variável real f e $A \subset D_f$, diz-se que:

- f é estritamente crescente em A se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- f é estritamente decrescente em A se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- f é constante em A se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
- f é crescente, em sentido lato, em A se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- f é decrescente, em sentido lato, em A se $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- f é monótona em A se f é crescente ou decrescente em A

Monotonia de uma função afim

Seja f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$

- f é crescente em $\mathbb{R}$, se $a > 0$
- f é decrescente em $\mathbb{R}$, se $a < 0$

Função limitada

Dada uma função real de variável real *f* de domínio D_f , um número *M* é um:

- minorante de *f* se $\forall x \in D_f, f(x) \geq M$
- majorante de *f* se

Uma função que admite um minorante diz-se minorada e uma função que admite um majorante diz-se majorada.
Uma função que é simultaneamente minorada e majorada diz-se limitada.

Extremos absolutos

Dada uma função real de variável real *f* de domínio D_f e $f(a) \in D'_f$, $f(a)$ é:

- mínimo absoluto de *f* se $\forall x \in D_f, f(a) \leq f(x)$
- máximo absoluto de *f* se $\forall x \in D_f, f(a) \geq f(x)$

Noção de vizinhança

Dados um número real x_0 e um número e um número real positivo *r*, designa-se por vizinhança *r* de x_0 o intervalo $]x_0 - r, x_0 + r[$ e representa-se por $V_r(x_0)$.

Extremos relativos

Dada uma função real de variável real *f* de domínio D_f , *f* tem:

- um mínimo relativo (ou local) em $a \in D_f$ se existir $r > 0$, tal que $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$, e *a* é um minimizante de *f*
- um máximo relativo (ou local) em $a \in D_f$ se existir $r > 0$, tal que $\forall x \in D_f \cap V_r(a), f(a) \geq f(x)$, sendo *a* um maximizante de *f*

Concavidade de uma função

Dada uma função real de variável real *f*, um dado intervalo $I \subset D_f$ e quaisquer três pontos *P*, *Q* e *R* de abcissas em *I* que $x_P < x_Q < x_R$, *f* tem:

- concavidade voltada para baixo se o declive da reta *PQ* é superior do que o declive da reta *QR*
- concavidade voltada para cima se o declive da reta *PQ* é inferior do que o declive da reta *QR*

Função quadrática

Um função quadrática *f* é definida por uma expressão do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

- Pode ser escrita na forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, sendo (h, k) as coordenadas do vértice da parábola que representa esta função graficamente
- $h = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = f(h) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

Estudo da função do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $a \neq 0$

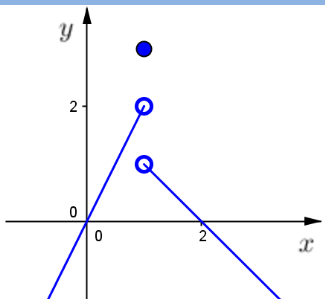
Domínio	Contradomínio	Monotonia
$D_f = \mathbb{R}$	• se $a > 0$, então $D'_f = [k, +\infty[$ • se $a < 0$, então $D'_f =]-\infty, k]$	• se $a > 0$, *f* é decrescente em $]-\infty, h]$ e crescente em $[h, +\infty[$ • se $a < 0$, *f* é decrescente em $[h, +\infty[$ e crescente em $]-\infty, h]$
Paridade	**Zeros**	**Extremos**
• se $h = 0$, então *f* é par • se $h \neq 0$, então *f* não é par nem ímpar • $x = h$ é um eixo de simetria	• se $k = 0$, então *f* tem um zero • se $a > 0$ $\begin{cases} k < 0, \text{ então } f \text{ tem dois zeros} \\ k > 0, \text{ então } f \text{ não tem zeros} \end{cases}$ • se $a < 0$ $\begin{cases} k < 0, \text{ então } f \text{ não tem zeros} \\ k > 0, \text{ então } f \text{ tem dois zeros} \end{cases}$	• se $a > 0$, então *k* é um mínimo • se $a < 0$, então *k* é um máximo **Concavidade** • se $a > 0$, então *f* tem concavidade voltada para cima • se $a < 0$, então *f* tem concavidade voltada para baixo

Função definida por ramos

Quando uma função é definida por expressões analíticas em diferentes partes do seu domínio, diz-se que a função está definida por ramos.

Exemplo:

$$f(x)=\begin{cases}2x & se \quad x<1\\ 3 & se \quad x=1\\ -x+2 & se \quad x>1\end{cases}$$



Função módulo

A função módulo, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=|x|$, pode ser definida por ramos da seguinte forma:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & se \quad x\geq 0\\ -x & se \quad x<0\end{cases}$$

As funções do tipo $f(x)=a|x-b|+c$ podem ser estudadas a partir da função $f(x)=|x|$.

Domínio	**Contradomínio**	**Monotonia**
$D_f=\mathbb{R}$	• se $a>0$, então $D'_f=[c,+\infty[$ • se $a<0$, então $D'_f=]-\infty,c]$	• se $a>0$, f é decrescente em $]-\infty,b]$ e crescente em $[b,+\infty[$ • se $a<0$, f é decrescente em $[b,+\infty[$ e crescente em $]-\infty,b]$
Paridade	**Zeros**	**Extremos**
• se $b=0$, então f é par • se $b\neq 0$, então f não é par nem ímpar • $x=b$ é um eixo de simetria	• se $c=0$, então f tem um zero • se $a>0$ $\begin{cases}c<0, \text{ então } f \text{ tem dois zeros}\\ c>0, \text{ então } f \text{ não tem zeros}\end{cases}$ • se $a<0$ $\begin{cases}c<0, \text{ então } f \text{ não tem zeros}\\ c>0, \text{ então } f \text{ tem dois zeros}\end{cases}$	• se $a>0$, então c é um mínimo • se $a<0$, então c é um máximo

Equações e inequações com módulos

A resolução de equações e inequações com módulos resolvem-se aplicando as seguintes propriedades:

- $|x|=k \Leftrightarrow x=k \vee x=-k$, se $k\geq 0$
- $|x|<k \Leftrightarrow x<k \wedge x>-k$
- $|x|>k \Leftrightarrow x>k \vee x<-k$

Função polinomial

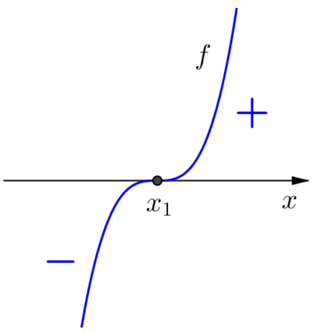
Uma função polinomial não nula é uma função real de variável real que pode ser definida analiticamente por um polinómio com uma só variável.

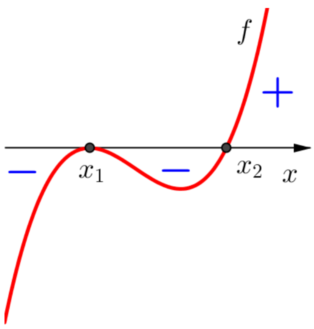
$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ onde a_0, a_1, ..., a_{n-1} e a_n são números reais, $a_0\neq 0$ e n é um número inteiro não negativo

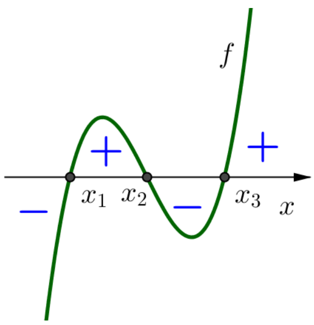
Função cúbica

Uma função do tipo: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$ é uma função cúbica.

Pode ter um zero, dois zeros ou três zeros.







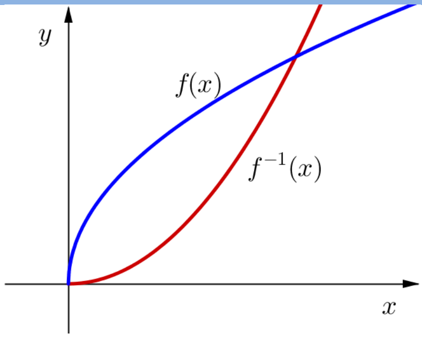
Função raiz quadrada

Seja

$$f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto x^2$$

uma função injetiva, a função inversa de *f*, f^{-1}, define-se por

$$f^{-1}:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$



Os gráficos de funções do tipo $f(x)=a\sqrt{x-b}+c$ podem ser obtidos a partir da função $f(x)=\sqrt{x}$.

Domínio	Contradomínio	Monotonia
$D_f=[b,+\infty[$	• se $a>0$, então $D'_f=[c,+\infty[$ • se $a<0$, então $D'_f=]-\infty,c]$	• se $a>0$, *f* é crescente em D_f • se $a<0$, *f* é decrescente em D_f
Paridade	**Zeros**	**Extremos**
• *f* não é par nem ímpar	• se $c=0$, então *f* tem um zero • se $a>0$ $\begin{cases} c<0, \text{ então } f \text{ tem um zero} \\ c>0, \text{ então } f \text{ não tem zeros} \end{cases}$ • se $a<0$ $\begin{cases} c<0, \text{ então } f \text{ não tem zeros} \\ c>0, \text{ então } f \text{ tem um zero} \end{cases}$	• se $a>0$, então c é um mínimo e b o minimizante • se $a<0$, então c é um máximo e b o maximizante **Concavidade** • se $a>0$, f tem concavidade voltada para baixo • se $a<0$, f tem concavidade voltada para cima

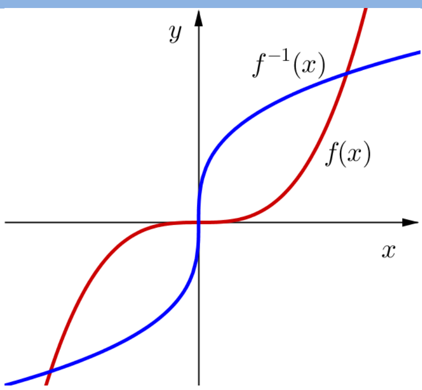
Função raiz cúbica

Seja

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3$$

uma função injetiva, a função inversa de *f*, f^{-1}, define-se por

$$f^{-1}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$



Os gráficos de funções do tipo $f(x)=a\sqrt[3]{x-b}+c$ podem ser obtidos a partir da função $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Domínio	Contradomínio	Monotonia
$D_f=\mathbb{R}$	$D'_f=\mathbb{R}$	• se $a>0$, *f* é crescente em D_f • se $a<0$, *f* é decrescente em D_f
Paridade	**Zeros**	**Concavidade**
• *f* não é par nem ímpar **Extremos** • *f* não tem extremos	• *f* tem um zero	• se $a>0$ $\begin{cases} x\in]-\infty,h], \ f \text{ tem concavidade voltada para cima} \\ x\in[h,+\infty[, \ f \text{ tem concavidade voltada para baixo} \end{cases}$ • se $a<0$ $\begin{cases} x\in]-\infty,h], \ f \text{ tem concavidade voltada para baixo} \\ x\in[h,+\infty[, \ f \text{ tem concavidade voltada para cima} \end{cases}$

Operações com funções

Dadas duas funções reais de variáveis real *f* e *g* de domínio D_f e D_g, um número real α e um número racional *r*, designa-se por:

- **função-soma** de *f* com *g* a função:
  $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
  $D_{f+g}=D_f\cap D_g$
- **função-produto** de *f* com *g* a função:
  $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$
  $D_{f\times g}=D_f\cap D_g$
- **função-quociente** de *f* com *g* a função:
  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$
  $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap\{x\in D_g:g(x)\neq 0\}$
- **função-produto** de *f* pelo escalar α a função:
  $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$
  $D_{\alpha f}=D_f$
- **função-potência** de expoente *r* de *f* a função:
  $(f^r)(x)=[f(x)]^r$; D_{f^r} é o conjunto de números reais *x* para os quais está definido $[f(x)]^r$
  - se $r>0: D_{f^r}=\{x\in D_f: f(x)\geq 0\}$
  - se $r=0: D_{f^r}=\{x\in D_f: f(x)\neq 0\}$
  - se $r<0: D_{f^r}=\{x\in D_f: f(x)>0\}$