

TESTE INTERMÉDIO

11.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

19/Maio/2006

MATEMÁTICA A

VERSÃO 3

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

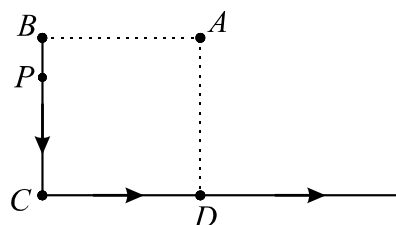
O Grupo II inclui quatro itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

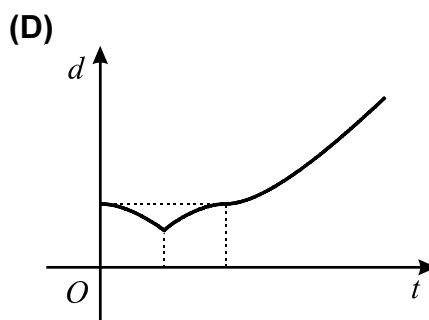
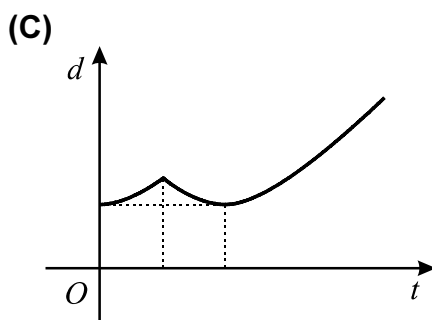
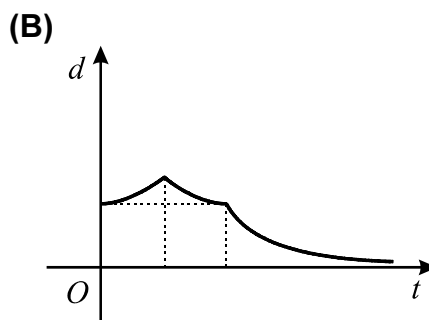
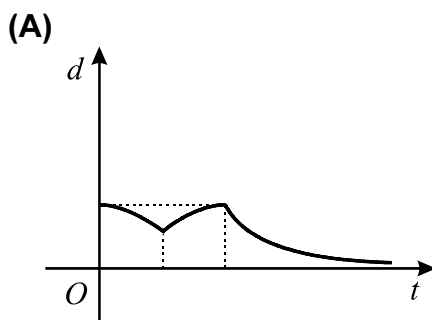
1. Na figura estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$
- uma semi-recta $\dot{CD}$



Admita que um ponto P , partindo de B , se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento $[BC]$ e seguidamente a semi-recta $\dot{CD}$).

Qual dos gráficos seguintes dá a distância d , do ponto P ao ponto A , em função do tempo t , contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?

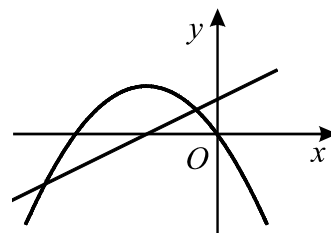


2. De uma função quadrática f sabe-se que o conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ é o intervalo $[1, 5]$.
Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $] -\infty, f(3)]$ (B) $[f(3), +\infty[$
(C) $[f(5), +\infty[$ (D) $] -\infty, f(1)]$

3. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função quadrática f ;
- parte do gráfico de uma função afim g .



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?

- (A) $] -4, -2] \cup]0, +\infty[$ (B) $[-4, -2[\cup [0, +\infty[$
(C) $] -\infty, -4[\cup [-2, 0[$ (D) $] -\infty, -4] \cup] -2, 0]$

4. Na figura 1 está representada graficamente a função f .
Na figura 2 está representada graficamente a função g .

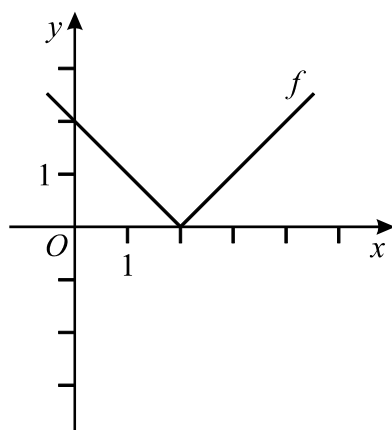


Figura 1

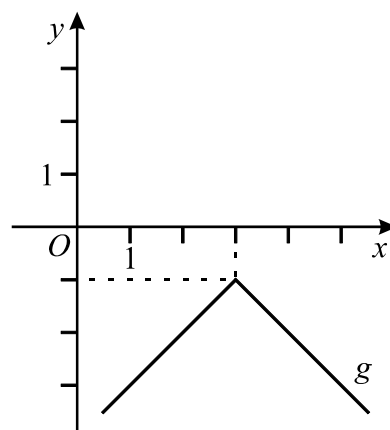


Figura 2

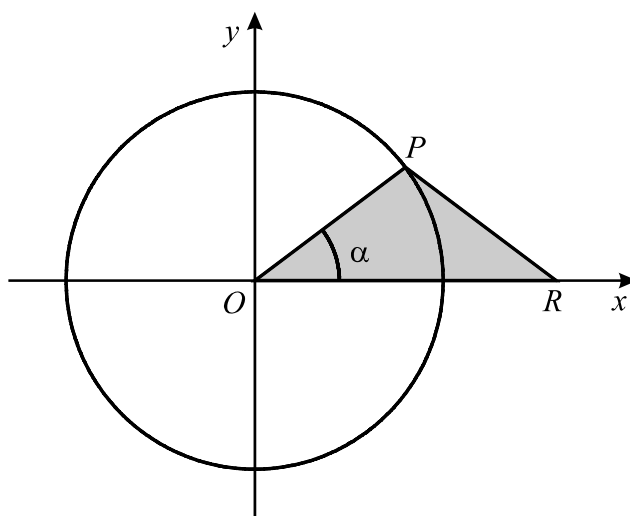
Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- (A) $g(x) = f(x+1) - 1$ (B) $g(x) = -f(x-1) - 1$
(C) $g(x) = -f(x+1) - 1$ (D) $g(x) = f(x-1) + 1$

5. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\sin x = \frac{1}{5}$.
Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$?

- (A) $\pi + \beta$ (B) $\frac{\pi}{2} - \beta$
(C) $-\beta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \beta$

6. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo $[OPR]$.



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox , de tal modo que o triângulo $[OPR]$ é sempre isósceles.
Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP , qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OPR]$, em função de α ?

- (A) $\frac{1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$ (B) $\frac{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha}{2}$
(C) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (D) $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
7. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$.
Qual das expressões seguintes dá o valor de $\sin \alpha$?

- (A) $-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ (B) $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
(C) $-\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$ (D) $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$

- 1.1. Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto dos números reais x tais que

$$f(x) \leq -1$$

Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

- 1.2. O gráfico da função f tem duas assíntotas. Escreva as suas equações.

2. Um agricultor deseja semear trigo e milho numa área não superior a 160 hectares.

Pretende semear pelo menos 50 hectares de trigo e pelo menos 30 hectares de milho.

Sabe-se que

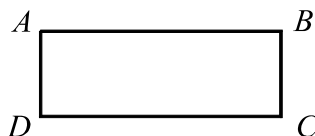
- o custo de produção de um hectare de trigo é 1 500 euros,
- o custo de produção de um hectare de milho é 1 000 euros,

e que

- cada hectare de trigo dá um lucro de 600 euros,
- cada hectare de milho dá um lucro de 500 euros.

Sabendo ainda que o agricultor não pode investir mais do que 200 000 euros nesta produção, quantos hectares de trigo e quantos hectares de milho deve o agricultor semear de modo que tenha um lucro máximo?

3. Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.

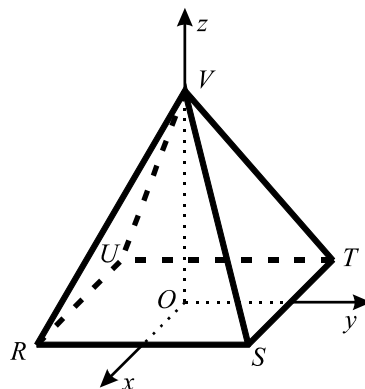


Mostre que o produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ é igual a $\overline{AB}^2$

4. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular.

Sabe-se que:

- a base $[RSTU]$ é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
- a aresta $[RS]$ é paralela ao eixo Oy ;
- o vértice V tem coordenadas $(0, 0, 2)$.

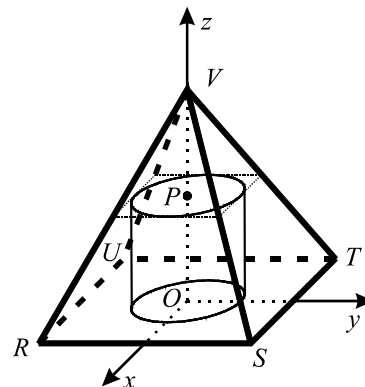


- 4.1. Mostre que a recta definida pela condição $x = 0 \wedge y = 2z$ é perpendicular ao plano STV e escreva uma equação deste plano.

- 4.2. Considere agora um ponto P que se desloca ao longo do segmento $[OV]$, nunca coincidindo com o ponto O , nem com o ponto V .

Para cada posição do ponto P considere o cilindro tal que:

- a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano xOy ;
- a base superior do cilindro tem centro no ponto P e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto P .



Seja z a cota do ponto P e seja f a função que dá o volume do cilindro, em função de z .

- 4.2.1. Justifique que o domínio da função f é o intervalo $]0, 2[$ e que

$$f(z) = \pi \left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z \right)$$

- 4.2.2. Considere o seguinte problema:

Entre que valores deve variar a cota do ponto P de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide?

Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a **graficamente**.

Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas.

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada..... 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II 137

1. 32

1.1.20

1.2.12

2. 25

3. 20

4. 60

4.1.20

4.2.40

4.2.1.25

4.2.2.15

TOTAL 200