

**TESTE INTERMÉDIO**

**11.º Ano de Escolaridade**

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da Prova: **90 minutos**

10/Maio/2007

**MATEMÁTICA A**

**VERSÃO 1**

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação da prova.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

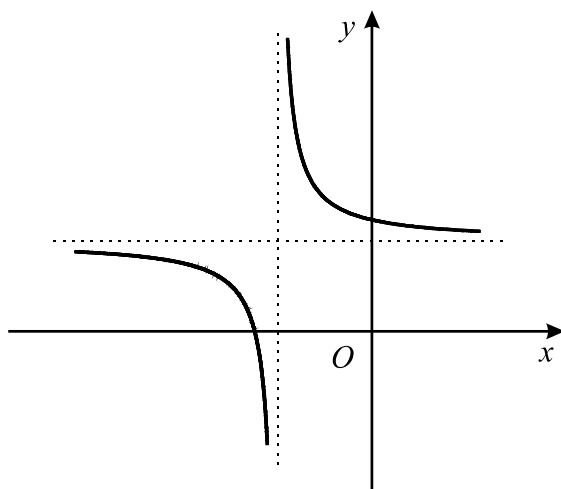
O Grupo I inclui sete itens de escolha múltipla.

O Grupo II inclui três itens de resposta aberta, subdivididos em alíneas, num total de sete.

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Para um certo valor de  $a$  e para um certo valor de  $b$ , a expressão  $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$  define a função  $f$  cujo gráfico está parcialmente representado na figura.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A)  $a > 0 \wedge b > 0$

(B)  $a > 0 \wedge b < 0$

(C)  $a < 0 \wedge b > 0$

(D)  $a < 0 \wedge b < 0$

2. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação  $\frac{x^2 + 1}{2 - x} < 0$

- (A)  $] -1, 2[$       (B)  $] 1, 2[$       (C)  $] -\infty, 2[$       (D)  $] 2, +\infty[$

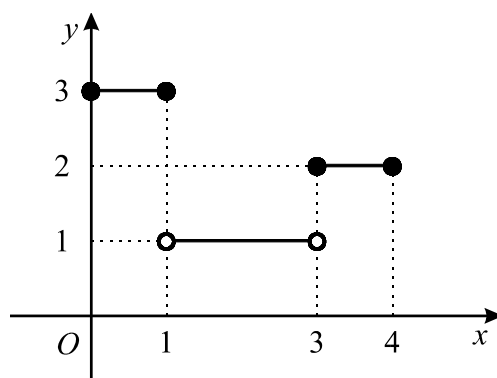
3. Considere as seguintes funções:

$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  definida pela tabela

|        |   |   |   |
|--------|---|---|---|
| $x$    | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 3 | 1 | 2 |

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = 2x + 1$

$h : [0, 4] \rightarrow \{1, 2, 3\}$  cujo gráfico é



Indique o valor de  $f^{-1}(2) + (g \circ h)(\sqrt{2})$

- (A) 4      (B) 5      (C) 6      (D) 7

4. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 1 - x^2$

Seja  $t$  a recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{2}$

Qual é a inclinação da recta  $t$ ?

- (A)  $30^\circ$       (B)  $45^\circ$       (C)  $135^\circ$       (D)  $150^\circ$

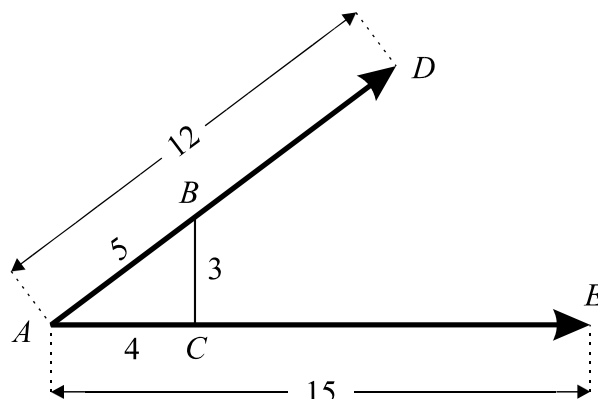
5. Na figura estão representados dois vectores,  $\overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{AE}$ , de normas 12 e 15, respectivamente.

No segmento de recta  $[AD]$  está assinalado um ponto  $B$ .

No segmento de recta  $[AE]$  está assinalado um ponto  $C$ .

O triângulo  $[ABC]$  é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Indique o valor do produto escalar  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$



- (A) 108                      (B) 128                      (C) 134                      (D) 144

6. Indique as soluções da equação  $5 + 2 \cos x = 6$  que pertencem ao intervalo  $[0, 2\pi]$

(A)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$

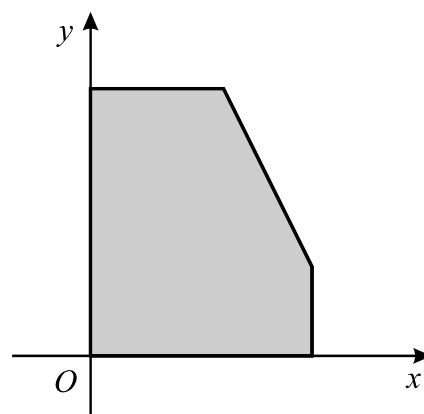
(B)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$

(C)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{7\pi}{6}$

(D)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{11\pi}{6}$

7. Na figura junta está representada a região admissível de um problema de Programação Linear. Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \leq 6 \\ 2x + y \leq 12 \end{cases}$$



Qual é o valor máximo que a função objectivo, definida por  $z = x + y$ , pode alcançar nesta região?

- (A) 7                      (B) 9                      (C) 11                      (D) 13

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Durante os ensaios de um motor, a velocidade de rotação do seu eixo variou, ao longo dos primeiros oito minutos da experiência, de acordo com a função

$$v(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$$

onde  $t$  designa o tempo (medido em minutos), contado a partir do início da experiência, e  $v(t)$  designa a velocidade de rotação do eixo do motor (medida em **centenas** de rotações por minuto).

- 1.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine qual foi a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência. Apresente o resultado em centenas de rotações por minuto.
- 1.2. Recorrendo às **capacidades gráficas da calculadora**, determine durante quanto tempo é que, nos primeiros oito minutos da experiência, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 6 000 rotações por minuto. Escreva o **resultado final em minutos e segundos** (com o número de segundos arredondado às unidades). Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtidos, bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema (apresente as **abscissas com duas casas decimais**).

2. Considere, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o ponto  $P(0, 4, 3)$

- 2.1. Seja  $\alpha$  o plano que contém o ponto  $P$  e é perpendicular à recta de equação vectorial  $(x, y, z) = (0, 1, -3) + k(1, 0, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Determine a área da secção produzida pelo plano  $\alpha$  na esfera definida pela condição  $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \leq 3$ .

*Sugere-se que:*

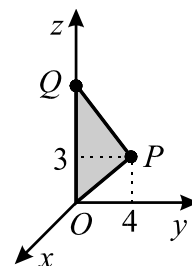
- Determine uma equação do plano  $\alpha$ .
- Mostre que o centro da esfera pertence ao plano  $\alpha$ .
- Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.

- 2.2. Admita que um ponto  $Q$  se desloca ao longo do semieixo positivo  $Oz$ , nunca coincidindo com a origem  $O$  do referencial.

Seja  $f$  a função que faz corresponder, à cota  $z$  do ponto  $Q$ , o perímetro do triângulo  $[OPQ]$ .

- 2.2.1. Mostre que  $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

- 2.2.2. **Sem recorrer à calculadora**, determine a cota do ponto  $Q$  de modo que o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  seja igual a 16.



### 3.

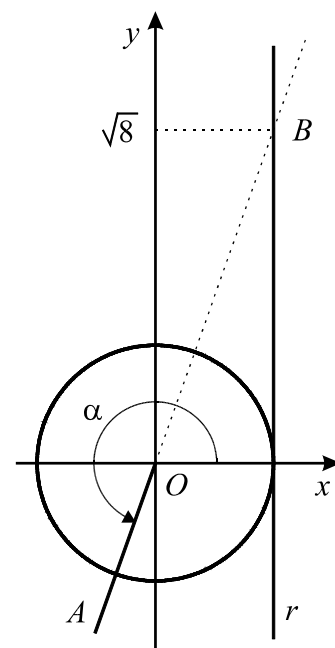
**3.1.** Na figura junta estão representados, em referencial o. n.  $xOy$ :

- o círculo trigonométrico
- a recta  $r$ , de equação  $x = 1$
- o ângulo, de amplitude  $\alpha$ , que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semi-recta  $\dot{OA}$
- o ponto  $B$ , intersecção do prolongamento da semi-recta  $\dot{OA}$  com a recta  $r$ .

Como a figura sugere, a ordenada de  $B$  é  $\sqrt{8}$

**Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de

$$5 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos (3\pi - \alpha)$$



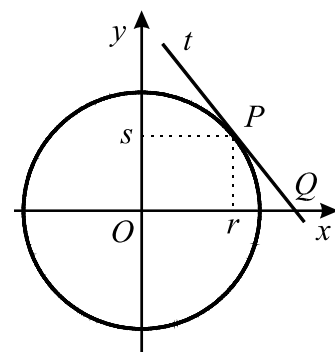
**3.2.** Considere agora um ponto  $P$ , do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.

Sejam  $(r, s)$  as coordenadas do ponto  $P$ .

Seja  $t$  a recta tangente à circunferência no ponto  $P$ .

Seja  $Q$  o ponto de intersecção da recta  $t$  com o eixo  $Ox$ .

Prove que a abcissa do ponto  $Q$  é  $\frac{1}{r}$



**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I .....63**

Cada resposta certa ..... 9  
Cada resposta errada..... 0  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Grupo II .....137**

1. .... 40

1.1. ....20

1.2. ....20

2. .... 57

2.1. .... 19

2.2. .... 38

2.2.1. .... 19

2.2.2. .... 19

3. .... 40

3.1. ....20

3.2. ....20

**TOTAL ..... 200**