

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

10 de Maio de 2007

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

---

### Grupo I

1.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) =$   
 $= 12 \times 15 \times \frac{3}{5} = 108$

Resposta **A**

2.  $4 + 2 \sin x = 5 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

No intervalo  $[0, 2\pi]$ , as soluções desta equação são

$\frac{\pi}{6}$  e  $\pi - \frac{\pi}{6}$ , ou seja,  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$

Resposta **C**

3. O valor máximo da função objectivo de um problema de Programação Linear é atingido num vértice da região admissível.  
Os vértices da região representada são:

$(0, 0)$

$(0, 6) \rightarrow$  intersecção do eixo  $Oy$  com a recta de equação  $y = 6$

$(4, 6) \rightarrow$  intersecção das rectas de equações  $y = 6$  e  $3x + y = 18$

$(5, 3) \rightarrow$  intersecção das rectas de equações  $x = 5$  e  $3x + y = 18$

$(5, 0) \rightarrow$  intersecção do eixo  $Ox$  com a recta de equação  $x = 5$

Calculemos o valor da função objectivo,  $z = x + y$ , em cada um destes pontos:

$(0, 0) \rightarrow z = 0 + 0 = 0$

$(0, 6) \rightarrow z = 0 + 6 = 6$

$(4, 6) \rightarrow z = 4 + 6 = 10$

$(5, 3) \rightarrow z = 5 + 3 = 8$

$(5, 0) \rightarrow z = 5 + 0 = 5$

Assim, o valor máximo que a função objectivo pode alcançar na região representada é 10.

Resposta **B**

4. As assíntotas do gráfico da função definida por  $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$  são as rectas de equações  $y = a$  e  $x = b$ .  
Tem-se, assim, que  $a < 0 \wedge b > 0$

Resposta **C**

5. Na fracção  $\frac{x^2+4}{1-x}$  o numerador é positivo, para qualquer  $x$  real, pelo que a fracção é positiva quando o denominador o for.  
Ora,  $1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

Resposta **C**

6.  $f^{-1}(1) + (g \circ h)(\pi) = 2 + g[h(\pi)] =$   
 $= 2 + g(2) = 2 + 5 = 7$

Resposta **D**

7. Tem-se que  $f'(x) = 2x$ , pelo que  $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$   
O declive da recta  $t$  é, portanto,  $-1$ , pelo que a sua inclinação é  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Resposta **C**

## Grupo II

1.

- 1.1. Começamos por determinar uma equação do plano  $\alpha$ .  
Um vector normal ao plano  $\alpha$  é o vector de coordenadas  $(2, 1, 0)$ .  
Portanto, o plano  $\alpha$  pode ser definido por uma equação do tipo  $2x + y = d$   
Como o plano  $\alpha$  contém o ponto  $P(0, 3, 4)$ , vem  $2 \times 0 + 3 = d$ , ou seja,  $d = 3$ .  
Uma equação do plano  $\alpha$  é, portanto,  $2x + y = 3$ .  
O centro da esfera é o ponto de coordenadas  $(-1, 5, 4)$ . Substituindo estas coordenadas na equação  $2x + y = 3$  vem  $2 \times (-1) + 5 = 3$ , o que é verdade, pelo que o plano  $\alpha$  contém o centro da esfera.  
Assim, a secção produzida pelo plano  $\alpha$  na esfera é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e cujo raio é igual ao da esfera.  
Como a área de um círculo é dada por  $\pi r^2$ , a área da secção é igual a  $7\pi$ .

**1.2.1.** O perímetro do triângulo  $[OPQ]$  é igual a  $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{PQ}$

Tem-se que:

$$\overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2, \text{ pelo que } \overline{OP} = 5$$

$$\overline{OQ} = z$$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \|\vec{PQ}\| = \|Q - P\| = \\ &= \|(0, 0, z) - (0, 3, 4)\| = \\ &= \|(0, -3, z - 4)\| = \sqrt{0 + 9 + (z - 4)^2} = \\ &= \sqrt{9 + z^2 - 8z + 16} = \sqrt{z^2 - 8z + 25}\end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  é igual a  $z + 5 + \sqrt{z^2 - 8z + 25}$

**1.2.2.** Tem-se:

$$\begin{aligned}z + 5 + \sqrt{z^2 - 8z + 25} &= 18 \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 8z + 25} = 18 - z - 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 8z + 25} &= 13 - z \Rightarrow \left(\sqrt{z^2 - 8z + 25}\right)^2 = (13 - z)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^2 - 8z + 25 &= 169 - 26z + z^2 \Leftrightarrow 26z - 8z = 169 - 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 18z &= 144 \Leftrightarrow z = 8\end{aligned}$$

Como, num passo da resolução, se elevaram ambos os membros da equação ao quadrado, não é possível garantir que 8 é solução da equação inicial. Temos de verificar se assim é:

$$8 + 5 + \sqrt{8^2 - 8 \times 8 + 25} = 18 \Leftrightarrow 18 = 18, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, 8 é solução da equação inicial.

Assim, o ponto  $Q$  deve ter cota 8, de modo que o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  seja igual a 18.

## 2.

2.1. Tem-se:  $v'(t) = 6t^2 - 42t + 60$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 1 \times 10}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \vee t = 5$$

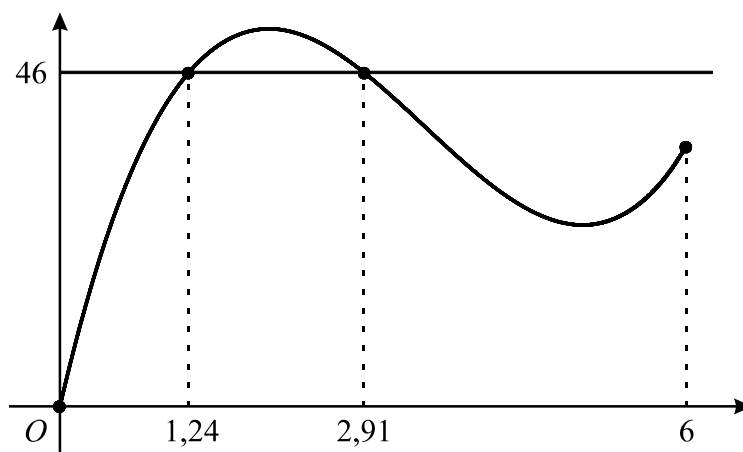
|         |   |            |    |            |    |            |    |
|---------|---|------------|----|------------|----|------------|----|
| $t$     | 0 |            | 2  |            | 5  |            | 6  |
| $v'(t)$ | + | +          | 0  | -          | 0  | +          | +  |
| $v(t)$  | 0 | $\nearrow$ | 52 | $\searrow$ | 25 | $\nearrow$ | 36 |

Portanto, a velocidade máxima atingida, nos primeiros seis minutos da experiência, foi de 52 centenas de rotações por minuto.

2.2. Começamos por observar que 4 600 (rotações por minuto) é igual a 46 centenas (de rotações por minuto).

Temos, assim, de começar por resolver a inequação  $v(t) > 46$ .

Na figura está representado o gráfico da função  $v$ , bem como a recta de equação  $y = 46$ .



Assinalaram-se os pontos de intersecção do gráfico de  $v$  com a recta, bem como as respectivas abcissas, com duas casas decimais, conforme era pedido no enunciado.

Portanto, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 4 600 rotações por minuto durante  $2,91 - 1,24$  minutos, ou seja, durante 1,67 minutos.

Atendendo a que  $0,67 \times 60 \approx 40$ , podemos concluir que a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 4 600 rotações por minuto durante 1 minuto e 40 segundos.

### 3.

3.1. Resulta da figura que  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$

Pretende-se saber  $8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \sin \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$

Ora,  $8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \sin \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = 8 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 6 \cos \alpha$

Portanto, sabemos que  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$  e queremos saber o valor de  $6 \cos \alpha$

Tem-se:  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Vem, então:  $1 + (-\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

Como  $\alpha$  é um ângulo cujo lado extremidade está no segundo quadrante, tem-se que  $\cos \alpha < 0$ .

Portanto,  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Vem então que  $6 \cos \alpha = -2$

3.2. Apresentamos a seguir três possíveis processos de resolução:

1º Processo:

Seja  $\beta$  a amplitude do ângulo  $QOP$ .

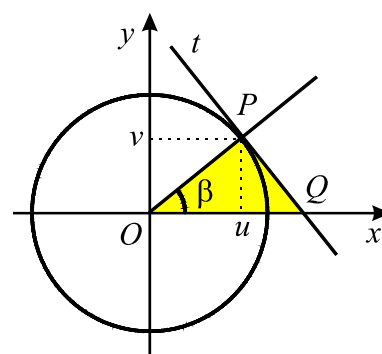
Por um lado, tem-se que  $\cos \beta = u$

Por outro lado, tem-se que

$$\cos \beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

Portanto,  $\frac{1}{\overline{OQ}} = u$ , donde  $\overline{OQ} = \frac{1}{u}$

Portanto, a recta  $t$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abscissa  $\frac{1}{u}$



### 2º Processo:

Seja  $x$  a abcissa do ponto  $Q$ . Como este ponto pertence ao eixo  $Ox$ , a sua ordenada é zero.

Tem-se assim que  $Q$  tem coordenadas  $(x, 0)$ .

Como a recta  $t$  é tangente à circunferência no ponto  $P$ , os vectores  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{PQ}$  são perpendiculares, pelo que  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ .

Como  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, 0) - (u, v) = (x - u, -v)$ , vem:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (u, v) \cdot (x - u, -v) = 0 \Leftrightarrow ux - u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ux = u^2 + v^2 \Leftrightarrow ux = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$$

### 3º Processo:

Tem-se que  $\overrightarrow{OP} = (u, v)$ , pelo que um vector director da recta  $t$  é o vector  $\vec{u} = (-v, u)$

O declive da recta  $t$  é, portanto, igual a  $-\frac{u}{v}$

A equação reduzida da recta  $t$  é, assim, da forma  $y = -\frac{u}{v}x + b$

Como o ponto  $P(u, v)$  pertence a esta recta, tem-se que  $v = -\frac{u}{v}u + b$ ,

$$\text{donde vem } b = v + \frac{u}{v}u = v + \frac{u^2}{v} = \frac{v^2 + u^2}{v} = \frac{1}{v}$$

A equação reduzida da recta  $t$  é  $y = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v}$

A abcissa do ponto de intersecção da recta  $t$  com o eixo  $Ox$  é a solução da equação

$$0 = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v} \quad (\text{onde } x \text{ é a incógnita}).$$

$$\text{Ora, } 0 = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{u}{v}x = \frac{1}{v} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{v} \times \frac{v}{u} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$$