

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

10 de Maio de 2007

RESOLUÇÃO - VERSÃO 4

Grupo I

1. As assíntotas do gráfico da função definida por $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ são as rectas de equações $y = a$ e $x = b$.
Tem-se, assim, que $a < 0 \wedge b > 0$

Resposta **B**

2. Na fracção $\frac{x^2+4}{1-x}$ o numerador é positivo, para qualquer x real, pelo que a fracção é positiva quando o denominador o for.
Ora, $1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

Resposta **A**

3. $f^{-1}(1) + (g \circ h)(\pi) = 2 + g[h(\pi)] =$
 $= 2 + g(2) = 2 + 5 = 7$

Resposta **A**

4. Tem-se que $f'(x) = 2x$, pelo que $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$
O declive da recta t é, portanto, -1 , pelo que a sua inclinação é $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Resposta **B**

5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{AE}\| \times \cos(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) =$
 $= 12 \times 15 \times \frac{3}{5} = 108$

Resposta **D**

6. $4 + 2 \sin x = 5 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$
No intervalo $[0, 2\pi]$, as soluções desta equação são $\frac{\pi}{6}$ e $\pi - \frac{\pi}{6}$, ou seja, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$

Resposta **A**

7. O valor máximo da função objectivo de um problema de Programação Linear é atingido num vértice da região admissível.

Os vértices da região representada são:

$$(0, 0)$$

$$(0, 6) \rightarrow \text{intersecção do eixo } Oy \text{ com a recta de equação } y = 6$$

$$(4, 6) \rightarrow \text{intersecção das rectas de equações } y = 6 \text{ e } 3x + y = 18$$

$$(5, 3) \rightarrow \text{intersecção das rectas de equações } x = 5 \text{ e } 3x + y = 18$$

$$(5, 0) \rightarrow \text{intersecção do eixo } Ox \text{ com a recta de equação } x = 5$$

Calculemos o valor da função objectivo, $z = x + y$, em cada um destes pontos:

$$(0, 0) \rightarrow z = 0 + 0 = 0$$

$$(0, 6) \rightarrow z = 0 + 6 = 6$$

$$(4, 6) \rightarrow z = 4 + 6 = 10$$

$$(5, 3) \rightarrow z = 5 + 3 = 8$$

$$(5, 0) \rightarrow z = 5 + 0 = 5$$

Assim, o valor máximo que a função objectivo pode alcançar na região representada é 10.

Resposta **C**

Grupo II

1.

1.1. Tem-se: $v'(t) = 6t^2 - 42t + 60$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t^2 - 42t + 60 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 1 \times 10}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \vee t = 5$$

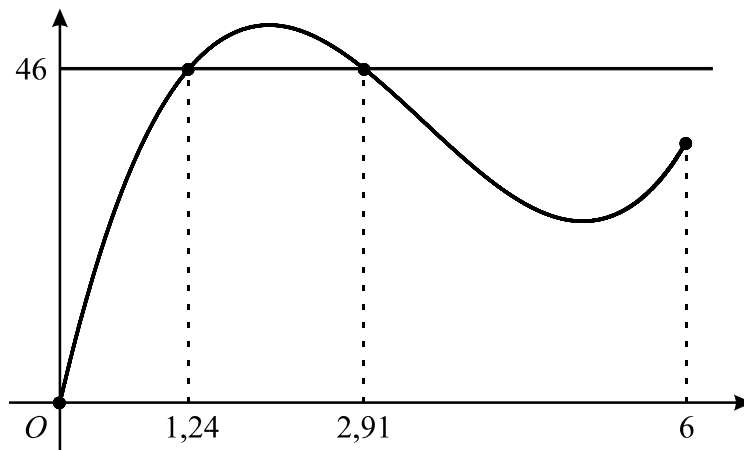
t	0		2		5		6
$v'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$v(t)$	0	$\nearrow$	52	$\searrow$	25	$\nearrow$	36

Portanto, a velocidade máxima atingida, nos primeiros seis minutos da experiência, foi de 52 centenas de rotações por minuto.

- 1.2. Começemos por observar que 4 600 (rotações por minuto) é igual a 46 centenas (de rotações por minuto).

Temos, assim, de começar por resolver a inequação $v(t) > 46$.

Na figura está representado o gráfico da função v , bem como a recta de equação $y = 46$.



Assinalaram-se os pontos de intersecção do gráfico de v com a recta, bem como as respectivas abcissas, com duas casas decimais, conforme era pedido no enunciado.

Portanto, a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 4 600 rotações por minuto durante $2,91 - 1,24$ minutos, ou seja, durante 1,67 minutos.

Atendendo a que $0,67 \times 60 \approx 40$, podemos concluir que a velocidade de rotação do eixo do motor foi superior a 4 600 rotações por minuto durante 1 minuto e 40 segundos.

2.

- 2.1. Começemos por determinar uma equação do plano α .

Um vector normal ao plano α é o vector de coordenadas $(2, 1, 0)$.

Portanto, o plano α pode ser definido por uma equação do tipo $2x + y = d$

Como o plano α contém o ponto $P(0, 3, 4)$, vem $2 \times 0 + 3 = d$, ou seja, $d = 3$.

Uma equação do plano α é, portanto, $2x + y = 3$.

O centro da esfera é o ponto de coordenadas $(-1, 5, 4)$. Substituindo estas coordenadas na equação $2x + y = 3$ vem $2 \times (-1) + 5 = 3$, o que é verdade, pelo que o plano α contém o centro da esfera.

Assim, a secção produzida pelo plano α na esfera é um círculo cujo centro coincide com o centro da esfera e cujo raio é igual ao da esfera.

Como a área de um círculo é dada por πr^2 , a área da secção é igual a 7π .

2.2.1. O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{PQ}$

Tem-se que:

$$\overline{OP}^2 = 3^2 + 4^2, \text{ pelo que } \overline{OP} = 5$$

$$\overline{OQ} = z$$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \|\vec{PQ}\| = \|Q - P\| = \\ &= \|(0, 0, z) - (0, 3, 4)\| = \\ &= \|(0, -3, z - 4)\| = \sqrt{0 + 9 + (z - 4)^2} = \\ &= \sqrt{9 + z^2 - 8z + 16} = \sqrt{z^2 - 8z + 25}\end{aligned}$$

Portanto, o perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $z + 5 + \sqrt{z^2 - 8z + 25}$

2.2.2. Tem-se:

$$\begin{aligned}z + 5 + \sqrt{z^2 - 8z + 25} &= 18 \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 8z + 25} = 18 - z - 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{z^2 - 8z + 25} &= 13 - z \Rightarrow \left(\sqrt{z^2 - 8z + 25}\right)^2 = (13 - z)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z^2 - 8z + 25 &= 169 - 26z + z^2 \Leftrightarrow 26z - 8z = 169 - 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 18z &= 144 \Leftrightarrow z = 8\end{aligned}$$

Como, num passo da resolução, se elevaram ambos os membros da equação ao quadrado, não é possível garantir que 8 é solução da equação inicial. Temos de verificar se assim é:

$$8 + 5 + \sqrt{8^2 - 8 \times 8 + 25} = 18 \Leftrightarrow 18 = 18, \text{ o que é verdade.}$$

Portanto, 8 é solução da equação inicial.

Assim, o ponto Q deve ter cota 8, de modo que o perímetro do triângulo $[OPQ]$ seja igual a 18.

3.

3.1. Resulta da figura que $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$

Pretende-se saber $8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$

Ora, $8 \cos (4\pi - \alpha) + 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = 8 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 6 \cos \alpha$

Portanto, sabemos que $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{8}$ e queremos saber o valor de $6 \cos \alpha$

Tem-se: $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Vem, então: $1 + (-\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$$

Como α é um ângulo cujo lado extremidade está no segundo quadrante, tem-se que $\cos \alpha < 0$.

Portanto, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Vem então que $6 \cos \alpha = -2$

3.2. Apresentamos a seguir três possíveis processos de resolução:

1º Processo:

Seja β a amplitude do ângulo QOP .

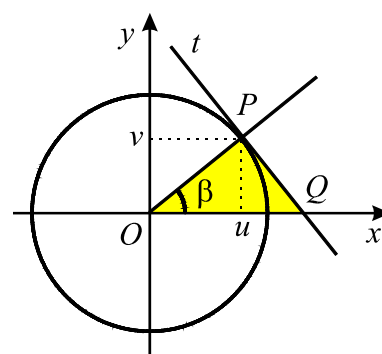
Por um lado, tem-se que $\cos \beta = u$

Por outro lado, tem-se que

$$\cos \beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\overline{OQ}}$$

Portanto, $\frac{1}{\overline{OQ}} = u$, donde $\overline{OQ} = \frac{1}{u}$

Portanto, a recta t intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{1}{u}$



2º Processo:

Seja x a abcissa do ponto Q . Como este ponto pertence ao eixo Ox , a sua ordenada é zero.

Tem-se assim que Q tem coordenadas $(x, 0)$.

Como a recta t é tangente à circunferência no ponto P , os vectores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{PQ}$ são perpendiculares, pelo que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

Como $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x, 0) - (u, v) = (x - u, -v)$, vem:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (u, v) \cdot (x - u, -v) = 0 \Leftrightarrow ux - u^2 - v^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ux = u^2 + v^2 \Leftrightarrow ux = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$$

3º Processo:

Tem-se que $\overrightarrow{OP} = (u, v)$, pelo que um vector director da recta t é o vector $\vec{u} = (-v, u)$

O declive da recta t é, portanto, igual a $-\frac{u}{v}$

A equação reduzida da recta t é, assim, da forma $y = -\frac{u}{v}x + b$

Como o ponto $P(u, v)$ pertence a esta recta, tem-se que $v = -\frac{u}{v}u + b$,

$$\text{donde vem } b = v + \frac{u}{v}u = v + \frac{u^2}{v} = \frac{v^2 + u^2}{v} = \frac{1}{v}$$

A equação reduzida da recta t é $y = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v}$

A abcissa do ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox é a solução da equação

$$0 = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v} \quad (\text{onde } x \text{ é a incógnita}).$$

$$\text{Ora, } 0 = -\frac{u}{v}x + \frac{1}{v} \Leftrightarrow \frac{u}{v}x = \frac{1}{v} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{v} \times \frac{v}{u} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$$