

Prova Escrita de Matemática B

10.º/11.º anos ou 11.º/12.º anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase

8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
 - sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
 - sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.
-

As cotações dos itens encontram-se na página 7.

A prova inclui um Formulário na página 8.

1. Numa região montanhosa, pretendia-se abrir um túnel em linha recta, unindo dois locais à mesma altitude. Devido à escassez de meios, seguiu-se um processo que era usado na Grécia Antiga.

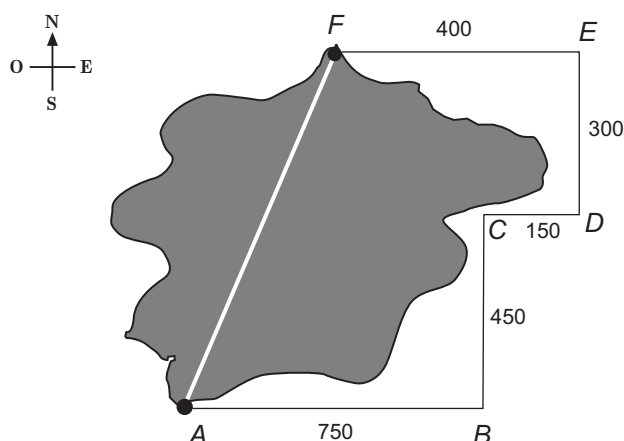


Fig. 1

No esquema da figura 1, que não está à escala, a região sombreada representa a montanha, e o segmento $[AF]$ o túnel. Este esquema ilustra o processo utilizado: sempre à mesma altitude, uma equipa técnica deslocou-se 750 metros para leste do ponto A , até ao ponto B ; do ponto B , deslocou-se 450 metros para norte, até ao ponto C , e assim sucessivamente, até ao ponto F , tal como está indicado na figura.

No fim deste processo, a equipa decidiu-se a usar coordenadas cartesianas, para saber que direcção deveriam tomar as escavações.

Para esse efeito, imaginou o referencial com origem em A , indicado na figura 2. A unidade usada nos eixos foi o metro.

Tendo em conta este referencial, responda aos seguintes itens.

1.1. Indique as coordenadas dos pontos assinalados na figura (A , B , C , D , E , F).

1.2. Determine a equação reduzida da recta AF .

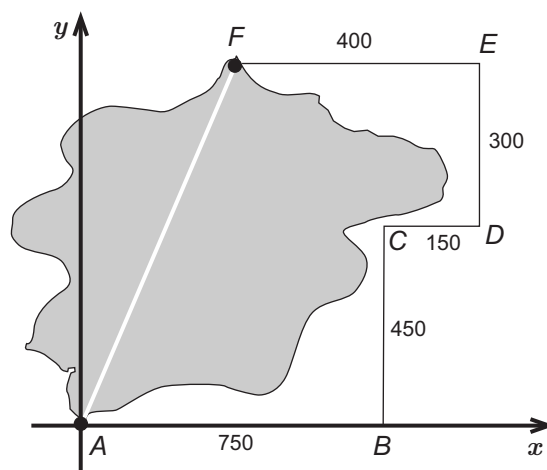


Fig. 2

2. Numa piscicultura, existe um tanque que tem actualmente 300 robalos. Ao serem introduzidas x trutas no tanque, a proporção $P(x)$ do número de trutas, relativamente ao número total de peixes que passam a existir no tanque, é tal que $P(x) = \frac{x}{300 + x}$.

2.1. A equação $P(x) = 1$ é impossível.

Interprete esta impossibilidade no contexto da situação descrita.

2.2. Pretende-se que a percentagem de trutas, relativamente ao número total de peixes, seja de 25%.

Qual é o número de trutas a introduzir no tanque?

3. Admita agora que, no tanque, existem 300 robalos e 200 trutas.

3.1. Vai ser pescado, ao acaso, um peixe do tanque. Admita que cada peixe tem igual probabilidade de ser pescado.

Qual é a probabilidade de se pescar um robalo?

3.2. Foram retirados do tanque doze robalos. Os valores dos respectivos comprimentos e pesos são os que constam da seguinte tabela.

Comprimento a (em mm)	157	165	168	159	172	165	166	163	159	169	171	168
Peso p (em g)	52	61	67	60	70	65	66	62	58	72	72	68

Recorrendo à calculadora, determine o coeficiente de correlação linear entre as variáveis a e p , arredondado às centésimas.

Interprete o valor obtido, tendo em conta a nuvem de pontos que pode visualizar na calculadora.

4. Numa pequena cidade foi colocado, em lugar de destaque, um painel publicitário alusivo às ofertas turísticas da região.

4.1. O painel tem um mecanismo que faz accionar um ponto luminoso (ponto P), que descreve uma circunferência de centro O , com cinco metros de raio, tal como a figura 3 sugere.

Sejam:

- θ a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\vec{OA}$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\vec{OP}$;
- $\overline{OB} = 7$;
- h a distância do ponto luminoso à base do painel.

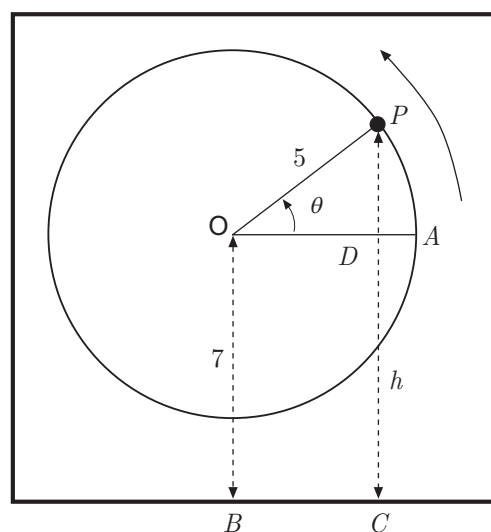


Fig. 3

Comece por completar a tabela seguinte, relativa a várias posições do ponto P , ao longo de uma volta.

θ	0°	90°	180°	270°	360°
h					

De seguida, mostre que, para $0^\circ < \theta < 90^\circ$, a distância, h , expressa em metros, do ponto luminoso à base do painel, é dada, em função de θ , por $h(\theta) = 7 + 5 \sin \theta$

- 4.2. Um gabinete de publicidade turística está a projectar um painel no qual figuram dez circunferências com o mesmo centro.

Conforme o projecto, a primeira circunferência terá 3 metros de raio, a segunda terá 3,10 metros de raio e assim sucessivamente, de acordo com uma progressão aritmética de razão 0,10 metros. Com o objectivo de fazer realçar o painel, à noite, pretende-se que cada uma destas dez circunferências fique coberta com fio luminoso.

Quantos metros de fio luminoso serão necessários para executar o projecto?

Apresente o resultado arredondado às centésimas. Nos valores intermédios, use sempre, pelo menos, três casas decimais.

5. Numa determinada região do interior, as chuvas torrenciais causaram inundações, e a região foi considerada zona de catástrofe. Os prejuízos acentuaram-se muito nas actividades agrícolas. Para enfrentar esta situação, os organismos ligados aos serviços agro-pecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY.

A FARJO é uma fábrica especializada na produção destes tipos de ração. Estas rações contêm três aditivos: vitaminas, sabores e conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes.

A FARJO dispõe, diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15 quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações.

Represente por x a quantidade de ração FarX produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY produzida diariamente, expressa em toneladas.

- 5.1. É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY?

Justifique.

- 5.2. Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima?

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

6. Sabe-se que Leonardo da Vinci (1456-1519) também se interessava por Matemática. Numa melancólica nota sobre a noite de 30 de Novembro de 1504, escreveu o seguinte, numa caligrafia regular e da direita para a esquerda (como costumava):

«Na noite de Santo André, encontrei a solução para a quadratura do círculo, quando se acabavam a candeia, a noite e o papel em que estava a escrever. Terminei-a de manhã».

Durante anos e anos, procuraram-se, entre os infindáveis cadernos que nos deixou, os manuscritos contendo as reflexões feitas naquela noite. Em vão: nunca foram encontrados.

Nas férias da Páscoa de 2008, o Manuel foi passar uns dias a casa dos avós. Vasculhando coisas velhas no sótão, encontrou uns papéis corroídos pelo tempo, escritos em italiano antigo e também numa caligrafia regular, da direita para a esquerda: pareciam ser o tão procurado caderno de Leonardo sobre a quadratura do círculo. Ficou espantado.

Imagine que o Manuel lhe pede a si que estude a possibilidade de a autoria dos papéis ser de Leonardo da Vinci.

Admita que, numa aula de Matemática B, aprendeu que a massa de carbono 14 (C_{14}), presente num artefacto desde a sua produção, é dada pela fórmula

$$y(t) = c e^{-0,000121 t}$$

em que c é a massa original de C_{14} , em gramas, e t é o tempo, em anos, decorrido desde o momento da produção do artefacto.

Decidiu, por isso, recorrer a um laboratório científico especializado em análises de C_{14} , que o informou do seguinte: o manuscrito contém 96% da massa de C_{14} original, ou seja, designando por c a massa de C_{14} original, a massa de C_{14} que o manuscrito contém é de $0,96 c$.

Com base nesta informação, redija um pequeno texto para o Manuel, no qual constem:

- a idade do papel (em número inteiro de anos);
- a data (em anos) em que terá sido fabricado;
- a conclusão quanto à possibilidade de Leonardo da Vinci ser o autor do manuscrito.

FIM

COTAÇÕES

1.		30 pontos
1.1.		12 pontos
1.2.		18 pontos
2.		40 pontos
2.1.		20 pontos
2.2.		20 pontos
3.		40 pontos
3.1.		20 pontos
3.2.		20 pontos
4.		40 pontos
4.1.		20 pontos
4.2.		20 pontos
5.		30 pontos
5.1.		10 pontos
5.2.		20 pontos
6.		20 pontos
TOTAL		200 pontos

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$