

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A - 10º ANO

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. A região sombreada é a intersecção de duas regiões:
- o círculo de centro no ponto $(2, -1)$ e raio 2, que é definido pela condição $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 4$
 - o semiplano definido pela condição $y \geq 0$

Resposta **B**

2. O gráfico da função f é o transformado do gráfico da função definida por $y = |x|$, pela translação associada ao vector de coordenadas (a, b) .
Por observação do gráfico, verificamos que $a > 0 \wedge b < 0$

Resposta **B**

3. Tem-se:

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow |x| + 7 = 3 \Leftrightarrow |x| = -4 \quad \text{Equação impossível}$$

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow |x| + 7 = 5 \Leftrightarrow |x| = -2 \quad \text{Equação impossível}$$

$$g(x) = 7 \Leftrightarrow |x| + 7 = 7 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$g(x) = 9 \Leftrightarrow |x| + 7 = 9 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Resposta **D**

4. Sendo o gráfico de f uma parábola com a concavidade voltada para baixo e cujo vértice tem ordenada igual a 3, o gráfico de $-f$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima e cujo vértice tem ordenada igual a -3 .
Portanto, o gráfico de g é o transformado do gráfico de $-f$, pela translação associada ao vector de coordenadas $(0, 7)$.
Assim, $g(x) = -f(x) + 7$

Resposta **A**

5. Se a chamada durar um minuto, ou menos, o preço a pagar é de 12 centimos.
Portanto, se $t \leq 60$, o preço a pagar é de 12 centimos.
Se a chamada durar mais do que um minuto, o total a pagar é a soma das duas parcelas seguintes:
- 12 centimos (preço do primeiro minuto);
 - quantia que resulta de multiplicar o número de segundos de conversação que decorrem para além do primeiro minuto $(t - 60)$ pelo preço de cada segundo (0,1 centimos).

Portanto, se $t > 60$, o preço a pagar é de $12 + 0,1(t - 60)$ centimos.

Resposta **C**

GRUPO II

1.1. Tem-se: $D(4, 0, 8)$ $F(0, -3, 8)$

Portanto, $\overrightarrow{FD} = D - F = (4, 3, 0)$

Assim, uma equação vectorial da recta DF é $(x, y, z) = (4, 0, 8) + k(4, 3, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

1.2. Tem-se $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$

Portanto, $\overline{AB} = 5$

A área da face $[ABED]$ é, então, $\overline{AB} \times \overline{BE} = 5 \times 8 = 40$

A face $[ACFD]$ é igual à face $[ABED]$, pelo que a sua área também é igual a 40

A área da face $[BCFE]$ é $\overline{CB} \times \overline{BE} = 6 \times 8 = 48$

Portanto, a área lateral do prisma é $40 + 40 + 48 = 128$

2. No percurso de R até S , a distância do ponto P ao ponto O não é constante, enquanto que, no percurso de S até T , a distância do ponto P ao ponto O é constante. Portanto, a opção A está incorrecta.

A distância do ponto P ao ponto O nunca é igual a zero, pelo que a opção B também está incorrecta.

O ponto P inicia o percurso em R e termina-o em T . Como os pontos R e T estão igualmente distanciados do ponto O , o valor de d correspondente ao instante inicial tem de ser igual ao valor de d correspondente ao instante final. Assim, a opção D também está incorrecta.

Portanto, a opção correcta é a opção C.

3.1. Área de cada quadrado: x^2

Área de cada triângulo: $\frac{(14-2x)(5-x)}{2} = (7-x)(5-x) = 35 - 12x + x^2$

$A(x) = 4x^2 + 2(35 - 12x + x^2) = 6x^2 - 24x + 70$

3.2. Tem-se: $6x^2 - 24x + 70 = 6(x^2 - 4x) + 70 = 6(x^2 - 4x + 4) - 24 + 70 = 6(x - 2)^2 + 46$

Portanto, o gráfico da função A tem vértice no ponto de coordenadas $(2, 46)$.

Assim, o valor de x pedido (valor para o qual a área da parte em metal é mínima) é igual a 2, sendo a respectiva área igual a 46 cm^2 .

- 3.3.** Se a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira, então a área da parte em metal é metade da área da placa.
Sendo a área da placa 140 cm^2 , metade é 70 cm^2 .

Trata-se, assim, de resolver a equação $A(x) = 70$

$$\text{Tem-se: } 6x^2 - 24x + 70 = 70 \Leftrightarrow 6x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 4) = 0$$

Como $x > 0$, tem de ser $x = 4$

- 4.1.** Uma vez que 4 é um zero do polinómio $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, podemos garantir que este polinómio é divisível por $x - 4$. Façamos a divisão, pela Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 4 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

O quociente da divisão é $x^2 + x - 2$

$$\text{Portanto, } x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x^2 + x - 2)$$

Determinemos agora os zeros do polinómio $x^2 + x - 2$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

Tem-se, então, o seguinte quadro:

x	$-\infty$	-2		1		4	$+\infty$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Portanto, } f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]1, 4[$$

4.2. De acordo com o enunciado, comecemos por determinar a equação reduzida da recta AB

Como $f(-3) = -28$, o ponto A tem coordenadas $(-3, -28)$

Como $f(0) = 8$, o ponto B tem coordenadas $(0, 8)$

Tem-se, então, que: $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 8) - (-3, -28) = (3, 36)$

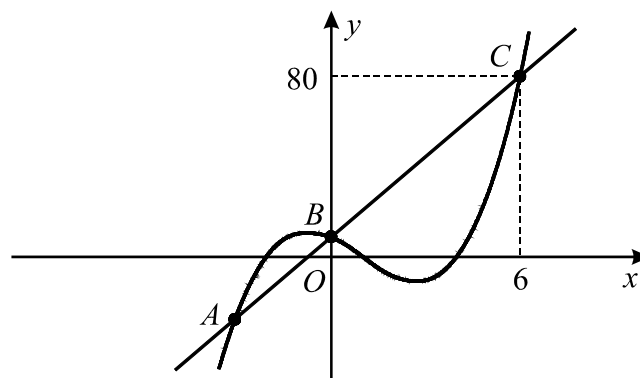
O declive da recta AB é igual a $\frac{36}{3}$, ou seja, é igual a 12

Como o ponto B tem coordenadas $(0, 8)$, a ordenada na origem da recta AB é igual a 8

A equação reduzida da recta AB é, portanto, $y = 12x + 8$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, podemos visualizar o gráfico de f e a recta AB .

Escolheu-se a janela $[-10, 10] \times [-50, 100]$, a qual permite visualizar o ponto C , cujas coordenadas se podem obter utilizando a ferramenta de intersecção da calculadora.



As coordenadas do ponto C são $(6, 80)$