

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 29.01.2009

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas
aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

- 1.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$$

A intersecção desta superfície com o plano xOy é

- (A) o conjunto vazio
- (B) um ponto
- (C) uma circunferência
- (D) um círculo

- 2.** Considere, num referencial o.n. xOy , a recta r de equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$

Seja s a recta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas $(1, 4)$

Qual é a equação reduzida da recta s ?

- (A) $y = 2x + 2$
- (B) $y = -2x + 6$
- (C) $y = -2x + \frac{5}{3}$
- (D) $y = 2x + \frac{3}{5}$

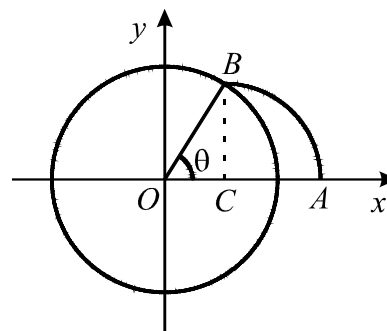
- 3.** Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0,3$

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem **apenas uma** solução. Em qual deles?

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$
- (C) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy :

- o círculo trigonométrico
- o raio $[OB]$ deste círculo
- o arco de circunferência AB , de centro no ponto C



Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e a recta BC é perpendicular a este eixo.

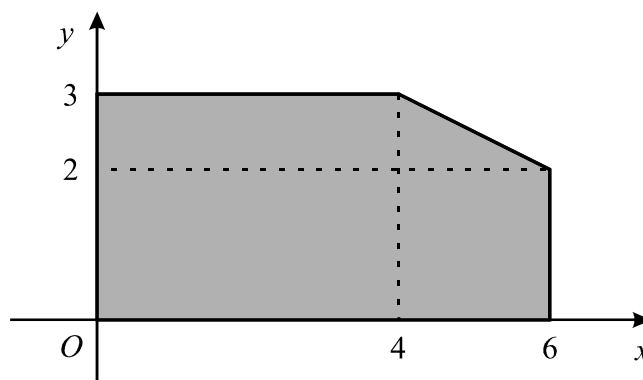
Seja θ a amplitude do ângulo AOB

Qual é a abcissa do ponto A ?

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| (A) $1 + \sin \theta$ | (B) $1 + \cos \theta$ |
| (C) $\cos \theta + \sin \theta$ | (D) $1 + \cos \theta + \sin \theta$ |

5. Num certo problema de Programação Linear, pretende-se maximizar a função objectivo, a qual é definida por $L = 3x + y$

Na figura está representada a região admissível.



Qual é a solução desse problema?

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (A) $x = 6$ e $y = 3$ | (B) $x = 4$ e $y = 2$ |
| (C) $x = 4$ e $y = 3$ | (D) $x = 6$ e $y = 2$ |

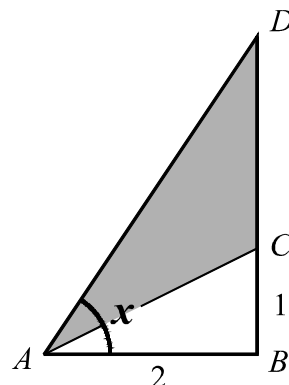
Grupo II

Nas respostas a itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Relativamente à figura junta, sabe-se que:

- o triângulo $[ABD]$ é rectângulo
- o ponto C pertence ao cateto $[BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
- $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BC} = 1$



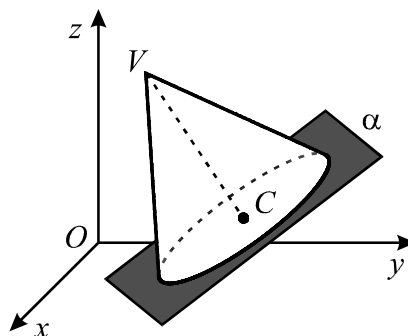
1.1. Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2 \operatorname{tg}(x) - 1$

1.2. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1

1.3. Sabendo que $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{5}{13}$ e que $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, determine o valor de $2 \operatorname{tg}(a) - 1$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução. Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano α de equação $x + 2y - 2z = 11$
- o vértice V do cone tem coordenadas $(1, 2, 6)$
- o ponto C é o centro da base do cone



2.1. Determine uma equação do plano γ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano α

2.2. Seja β o plano definido pela equação $2x - y + z = 3$. Averigúe se os planos α e β são perpendiculares.

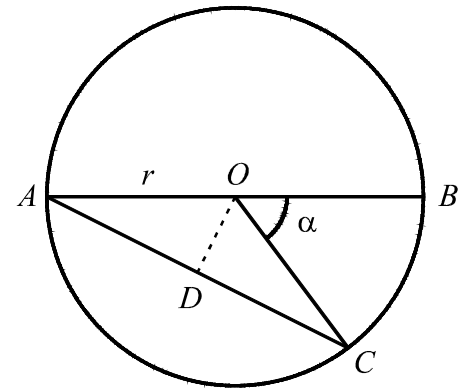
2.3. Seja W o ponto simétrico do ponto V , em relação ao plano xOy . Indique as coordenadas do ponto W e escreva uma condição que defina o segmento de recta $[VW]$.

2.4. Sabendo que o raio da base do cone é igual a 3, determine o volume do cone.
Sugestão: comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano α e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto C .

3. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio r .

Sabe-se que:

- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência
- O ponto C pertence à circunferência
- α é a amplitude do ângulo COB
- $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$



Prove que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

Sugestão

Percorra as seguintes etapas:

- Justifique que o triângulo $[OAC]$ é isósceles
- Justifique que $\overline{AC} = 2 \overline{AD}$
- Justifique que a amplitude do ângulo CAB é $\frac{\alpha}{2}$
- Escreva $\overline{AD}$, em função de $\frac{\alpha}{2}$ e de r
- Conclua que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I(5 × 10 pontos) 50 pontos

Grupo II 150 pontos

1. 60 pontos

1.1. 20 pontos

1.2. 20 pontos

1.3. 20 pontos

2. 70 pontos

2.1. 15 pontos

2.2. 15 pontos

2.3. 20 pontos

2.4. 20 pontos

3. 20 pontos

Total200 pontos