

TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A - 11º ANO

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

GRUPO I

1. O perímetro do triângulo $[OPQ]$ é igual a $\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{QP} =$
 $= 1 + 1 + 2 \cos 53^\circ \approx 3,2$

Resposta A

2. O facto de o ponteiro dos minutos do relógio da Inês ter rodado -3π radianos significa que rodou uma volta e meia, o que corresponde à passagem de 1 h 30 min.
Como $10 \text{ h } 45 \text{ min} + 1 \text{ h } 30 \text{ min} = 12 \text{ h } 15 \text{ min}$, o relógio da Inês marcava 12 h e 15 min.

Resposta C

3. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{CA} \overrightarrow{CB}}) =$
 $= 5 \times 5 \times \cos 180^\circ = 5 \times 5 \times (-1) = -25$

Resposta A

4. Como o gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, com vértice no ponto $(3, 2)$, a recta tangente ao gráfico em qualquer ponto de abcissa inferior a 3 tem declive positivo, no ponto de abcissa 3 tem declive 0 e em qualquer ponto de abcissa superior a 3 tem declive negativo. Portanto, $f'(1) > 0$, $f'(2) > 0$, $f'(3) = 0$ e $f'(4) < 0$.

Resposta D

5. $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(-3) = -2$

Resposta A

GRUPO II

$$1.1. \quad f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-4}{x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
<i>Quociente</i>	$+$	<i>n.d.</i>	$-$	0	$+$

Portanto, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$ é $] -\infty, -2[\cup [2, +\infty[$

1.2. Tem-se:

Área do quadrilátero $[ABCD] =$

$=$ Área do trapézio $[BODC] -$ Área do triângulo $[BOA]$

Tendo em vista o cálculo destas áreas, comecemos por determinar as coordenadas dos pontos A , B , C e D .

Como $f(0) = 2$, o ponto A tem coordenadas $(0, 2)$

Tem-se: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{4}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$

Portanto, o ponto B tem coordenadas $(-1, 0)$

C é o ponto de intersecção das assíntotas do gráfico de f , cujas equações são $x = -2$ e $y = 4$. Logo, o ponto C tem coordenadas $(-2, 4)$

Como o ponto D pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à de C , as suas coordenadas são $(0, 4)$

Tem-se, então: Área do quadrilátero $[ABCD] =$

$=$ Área do trapézio $[BODC] -$ Área do triângulo $[BOA] =$

$$= \frac{\overline{BO} + \overline{DC}}{2} \times \overline{OD} - \frac{\overline{BO} \times \overline{OA}}{2} =$$

$$= \frac{1+2}{2} \times 4 - \frac{1 \times 2}{2} = 6 - 1 = 5$$

2.1. Volume do prisma = Área da base $\times$ Altura

A área da base é a^2

A altura é a cota do ponto P

Como o ponto P pertence ao plano ABC e tem ordenada igual à abcissa, vem:

$$a + 2a + 3z = 9 \Leftrightarrow 3z = 9 - 3a \Leftrightarrow z = 3 - a$$

Portanto, o volume do prisma é igual a $a^2(3 - a) = 3a^2 - a^3$

2.2. Tem-se: $V'(a) = 6a - 3a^2$ ($a \in]0, 3[$)

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 6a - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow a(6 - 3a) = 0$$

Como $a \in]0, 3[$, tem que ser $6 - 3a = 0$, ou seja, $a = 2$

a	0	2	3
V'	+	0	-
V		↗ Máx.	↘

Concluimos assim que o volume do prisma é máximo quando $a = 2$

2.3. O ponto A pertence ao eixo Ox , pelo que a sua ordenada e a sua cota são iguais a zero.

Como o ponto A pertence ao plano ABC , vem:

$$x + 2 \times 0 + 3 \times 0 = 9 \Leftrightarrow x = 9$$

Portanto, o ponto A tem coordenadas $(9, 0, 0)$

Como o plano ABC tem equação $x + 2y + 3z = 9$, o vector de coordenadas $(1, 2, 3)$ é perpendicular ao plano, pelo que é um vector director da recta pedida.

Assim, uma equação vectorial da recta pedida é

$$(x, y, z) = (9, 0, 0) + k(1, 2, 3), \quad k \in \mathbb{R}$$

3.1. O Manuel atrasou-se uma hora e um quarto, ou seja, 75 minutos.
Como $c(75) \approx 99$, conclui-se que o Manuel saiu 99 minutos depois do meio dia, ou seja, às 13 h e 39 min.

3.2. O Manuel saiu 25 minutos depois do meio dia.

Ora,

$$c(t) = 25 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 25t}{t + 1} = 25$$

Como $t \geq 0$, $t + 1$ nunca é igual a zero, pelo que

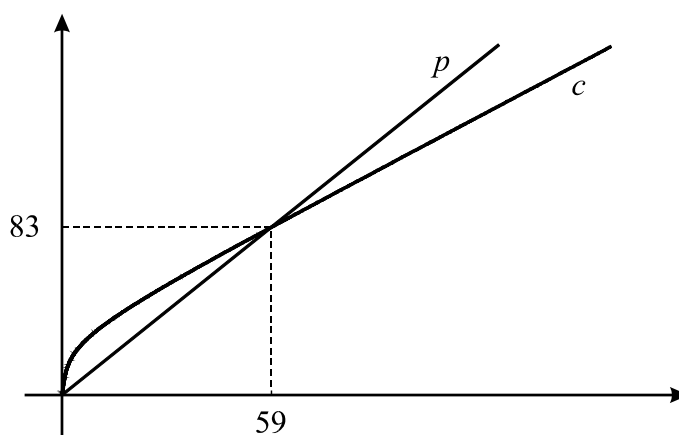
$$\frac{t^2 + 25t}{t + 1} = 25 \Leftrightarrow t^2 + 25t = 25t + 25 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 5$$

O Manuel chegou com cinco minutos de atraso.

3.3. De acordo com a proposta do Manuel, o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, deverá ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo. Portanto, de acordo com esta proposta, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa t minutos, é dado por $t + 0,4t$, ou seja, $1,4t$.

Consideremos os gráficos das duas funções: a função c , correspondente ao contrato em vigor, e a função p , correspondente à proposta do Manuel.

Assinalemos o ponto de intersecção destes gráficos (as suas coordenadas podem ser obtidas utilizando a ferramenta de intersecção da calculadora).



Da análise dos gráficos, concluímos que a proposta do Manuel é favorável ao trabalhador para atrasos inferiores a 59 minutos. Para atrasos superiores a 59 minutos, o contrato em vigor penaliza menos o trabalhador.

Quando o atraso é de 59 minutos, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, tempo esse igual a 83 minutos.