Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática B

11.º/12.º Anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, na página 11, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

O *Stomachion*, também conhecido como Caixa de Arquimedes, é um *puzzle* geométrico cuja invenção é atribuída a Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). É constituído por 14 peças poligonais que formam um quadrado como o representado na figura 1.

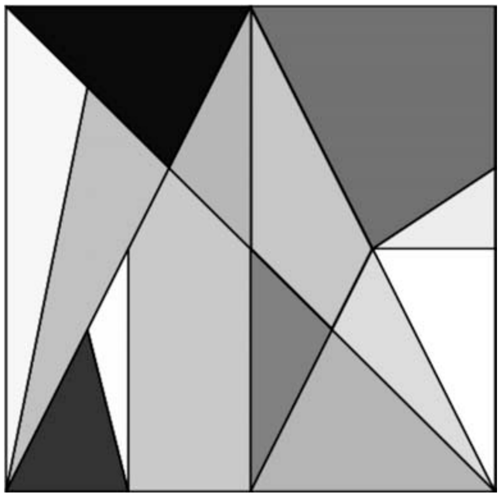

Fig. 1

A figura 2 representa, sobreposto a uma malha quadriculada, um *Stomachion* com **12 unidades de lado**. Os pontos A, B, C, D, E, F, G e H são vértices da malha.

Fixando um referencial ortogonal e monométrico, de origem D, como se sugere na figura 2, o ponto A tem coordenadas $(0,\, 6)$.

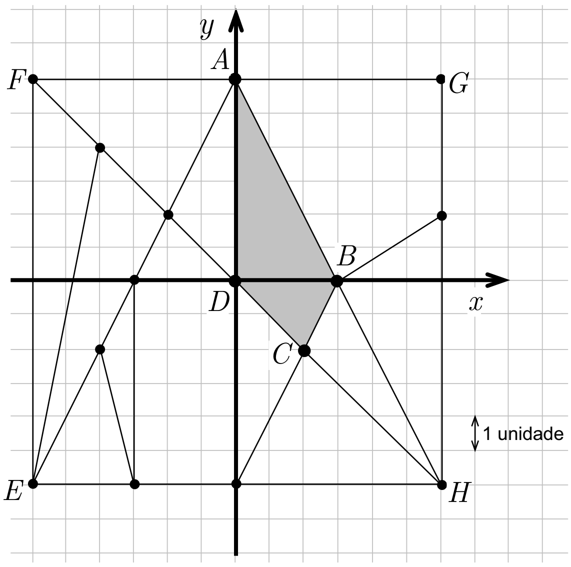

Fig. 2

1. Determine as coordenadas do **ponto simétrico** de C, relativamente ao eixo das abcissas.

2. Uma das propriedades do *Stomachion* é a seguinte: o **quociente** entre a área de cada peça e a área total do *Stomachion* é sempre um **número racional**.

Mostre que essa propriedade se verifica com a peça representada, na figura 2, pelo quadrilátero sombreado $[ABCD]$.

Sugestão: Na sua resposta pode percorrer, sucessivamente, as seguintes etapas:

- determine a área do quadrado $[EFGH]$;
- determine a área da peça sombreada;
- determine o quociente entre a área da peça sombreada e a área do quadrado;
- justifique que o quociente obtido é um número racional.

GRUPO II

Numa determinada região, existe um parque natural no qual vivem diferentes espécies de animais, cada uma no seu habitat.

Uma empresa pretende instalar uma unidade fabril nessa região, a sul do parque natural, e, para tal, aguarda decisão das entidades responsáveis. Para apoio dessa decisão, foi elaborado um estudo de impacto ambiental.

1. De acordo com esse estudo, prevê-se que o nível de concentração diário de um poluente, em partes por milhão $(\mathrm{p.p.m.})$, originado pelo escoamento de águas residuais, siga uma distribuição normal, $N\,(8,\,2)$, de média $\mu = 8$ e desvio padrão $\sigma = 2$.

O estudo refere que o nível de concentração desse poluente não deverá exceder o equilíbrio ecológico aceitável de $10\ \mathrm{p.p.m.}$

Determine a probabilidade de, num certo dia, o nível de concentração do poluente **exceder** esse valor.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

2. O estudo de impacto ambiental inclui dados de uma prospecção geotérmica realizada no parque natural por técnicos do Serviço de Geofísica. Os dados mostram que, a maiores profundidades, correspondem temperaturas mais elevadas.

Com base nesses dados, obteve-se a equação $y = 0{,}0290x + 18{,}36$, que define a recta de regressão de y sobre x, com $0 \leq x \leq 350$, designando x a profundidade, em metros, e y a temperatura, em graus Celsius.

Estime o valor da temperatura a $100\,\mathrm{m}$ de profundidade, de acordo com a equação da recta de regressão apresentada.

Apresente o resultado, em graus Celsius, com duas casas decimais.

3. Uma águia, ao efectuar um voo planado à procura de alimento, avistou uma lebre no fundo do vale do parque natural. O fundo do vale é uma área plana. De imediato, a águia iniciou um voo picado, a grande velocidade, em direcção à presa, capturando-a em poucos segundos. Após a captura, transportou a lebre para o cimo de um penhasco, terminando aí o seu voo.

O momento da captura corresponde ao instante em que a águia atingiu, no seu voo, a distância **mínima** ao fundo do vale.

Admita que a distância, h, em metros, a que a águia se encontra do fundo do vale, t segundos após o início do voo picado, é dada, aproximadamente, por

$$h\left(t\right) = -0{,}125t^4 + 2{,}5\,t^3 - 12{,}9t^2 - 1{,}1t + 94{,}8 \quad \text{com} \quad t \in \left[0;\ 9{,}6\right]$$

3.1. Determine o valor da taxa de variação média de h no intervalo $[0;\,3]$

Apresente o resultado com aproximação às décimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

3.2. Na figura 3, que não está à escala, apresenta-se um esboço do gráfico de f, função que dá, em metros por segundo, a **taxa de variação instantânea** de h no instante t.

Admita que a taxa de variação instantânea de h se anula no instante $t = 5{,}4$.

Descreva o que aconteceu no instante $t = 5{,}4$, no contexto da situação referida, justificando a ocorrência através da relação existente entre a **monotonia** de h e o **sinal** da respectiva taxa de variação instantânea.

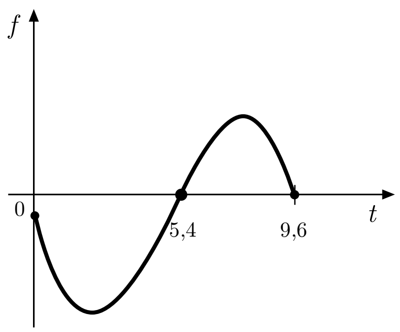

Fig. 3

4. No parque natural, foram plantadas, num certo momento, duas árvores, uma da espécie P e outra da espécie C.

Admita que as alturas, em metros, da árvore da espécie P e da árvore da espécie C, x anos depois de terem sido plantadas, são dadas, aproximadamente, por $P(x)$ e $C(x)$:

Espécie P: $$P\left(x\right) = \frac{10}{1 + 12{,}5e^{-0{,}23x}}$$

Espécie C: $$C\left(x\right) = \frac{6}{1 + 2{,}9e^{-0{,}12x}}$$

Com base nas funções apresentadas, alguém afirmou que:

I) quando as árvores foram plantadas, a árvore da espécie P tinha menos $1{,}1\ \mathrm{m}$ de altura do que a árvore da espécie C;

II) foram necessários mais do que oito anos para que a árvore da espécie P ficasse mais alta que a árvore da espécie C;

III) com o decorrer do tempo, a diferença entre as alturas das duas árvores tenderá a igualar os $4\ \mathrm{m}$.

Elabore uma pequena composição na qual refira se cada uma das afirmações, I), II) e III), está, ou não, correcta, explicitando, para cada caso, uma razão que fundamente a sua resposta.

GRUPO III

A BRUGÁS é uma empresa que processa uma variedade de gás usada na confecção de um produto para aquecimento. Este produto é classificado em dois tipos: $PPremium$ e $PRegular$.

Em cada semana, a BRUGÁS recebe $24\,\mathrm{m}^3$ de gás e dispõe de 45 horas para os processar.

Por motivos técnicos, as variedades de gás não podem ser processadas em simultâneo.

A produção de cada tonelada de $PPremium$:

- requer $3\ \mathrm{m}^3$ de gás;
- demora 5 horas;
- gera um lucro de 1600 euros.

A produção de cada tonelada de $PRegular$:

- requer $2\ \mathrm{m}^3$ de gás;
- demora 5 horas;
- gera um lucro de 1200 euros.

Devido a problemas relacionados com o armazenamento, a empresa só pode produzir até 5 toneladas de $PRegular$.

Represente por x o número de toneladas de $PPremium$ produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS.

Represente por y o número de toneladas de $PRegular$ produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS.

Quantas toneladas de $PPremium$ e de $PRegular$ devem ser produzidas, semanalmente, pela empresa BRUGÁS, para que o lucro semanal seja máximo?

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique a função objectivo;
- indique as restrições do problema;
- represente, graficamente, a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- calcule os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

GRUPO IV

Numa feira de agricultura, o Sr. Pedro, negociante de cavalos, pedia por um cavalo puro-sangue a quantia de $4\,000\,000$ de euros. O Sr. João estava muito interessado em comprar o cavalo, mas considerava o preço muito elevado.

O Sr. Pedro propôs-lhe, então, o seguinte negócio:

> «O cavalo tem 4 ferraduras, e cada uma delas tem 8 cravos. O Sr. João dá-me um **cêntimo** pelo primeiro cravo da ferradura da pata **dianteira esquerda**; dois cêntimos pelo segundo cravo da mesma ferradura, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até ao oitavo cravo dessa ferradura, pelo qual me dá $1{,}28$ euros.»
>
> «Repare: pelos oito cravos da ferradura desta pata, o Sr. João paga-me $2{,}55$ euros. Barata a feira! Continuemos para os outros cravos. Pelo primeiro cravo da pata **dianteira direita**, o Sr. João dá-me $2{,}56$ euros, isto é, o dobro do valor do oitavo cravo da pata dianteira esquerda, e assim sucessivamente, duplicando sempre, até se terem esgotado os 32 cravos das ferraduras do cavalo.»
>
> «O sr. João aceita pagar-me, por este cavalo, a quantia total do valor dos cravos das ferraduras?»

1. Verifique que o valor total dos cravos da ferradura da pata **dianteira esquerda** é de $2{,}55$ euros, tal como o Sr. Pedro refere.

2. Mostre que, de acordo com a proposta do Sr. Pedro, o valor a pagar pelo cavalo é superior a $4\,000\,000$ de euros.

GRUPO V

Na figura 4, ilustra-se um método simples para determinar o raio da Terra. Este método consiste em medir o ângulo α, ângulo de depressão do horizonte, a partir de um ponto de altitude elevada, do qual se avista o mar.

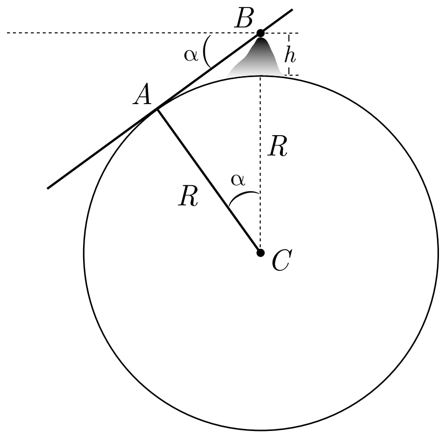

Fig. 4

Relativamente a esta figura, que não está à escala, considere que:

- B representa o ponto de observação;
- C designa o centro da Terra;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo de depressão do horizonte, $(0^{\text{o}} < \alpha < 90^{\text{o}})$;
- h é a altitude do lugar, em quilómetros;
- o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em A;
- R é o raio da Terra, em quilómetros;
- $\overline{BC} = R + h$.

1. Mostre que $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Sugestão: Comece por determinar $\cos\,\alpha$ no triângulo $[ABC]$ e, de seguida, resolva a equação obtida em ordem a R.

2. Eratóstenes (276-195 a.C.), por volta do ano 230 a.C., calculou, por um processo diferente e de grande simplicidade, o raio da Terra.

Admita que o valor calculado por Eratóstenes foi de $6316\ \text{km}$.

O Rodrigo calculou o raio da Terra pelo método acima descrito.

Utilizando um teodolito, obteve, a partir do cume da ilha do Pico, $\alpha = 1{,}5564^{\text{o}}$.

A altitude do Pico é $2{,}35\ \text{km}$.

Fig. 5

Determine a diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Sugestão: Comece por calcular o valor obtido pelo Rodrigo, usando a igualdade $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I		**30 pontos**
1.	10 pontos	
2.	20 pontos	
GRUPO II		**80 pontos**
1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
3.	30 pontos	
3.1. 15 pontos		
3.2. 15 pontos		
4.	20 pontos	
GRUPO III		**20 pontos**
GRUPO IV		**30 pontos**
1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
GRUPO V		**40 pontos**
1.	20 pontos	
2.	20 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:
$\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:
$\pi\, r\, g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica:
$4\, \pi\, r^2$ (r *– raio*)

Área lateral de um cilindro recto:
$2\, \pi\, r\, g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$ (r *– raio*)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então

- média de X:

$$\mu = x_1\, p_1 + \ldots + x_n\, p_n$$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2\, p_1 + \ldots + (x_n - \mu)^2\, p_n}$$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$