SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45, 3ºesq., 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt gebs@spm.pt

Proposta de resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
Para a prova de Matemática B (código 735)
1ª. Fase – 23/06/2009

Grupo I

1. Da figura, o ponto C tem as coordenadas $(2,-2)$; logo o seu simétrico em relação ao eixo das abcissas tem as coordenadas $(2,2)$.

2. Seguindo a sugestão, a área do quadrado $[EFGH]$ é de $12\times12=144$; a área da peça sombreada (decomposta nos triângulos $[ADB]$ e $[BCD]$) é de $\frac{6\times3}{2}+\frac{3\times2}{2}=12$.
Assim, a razão pedida é de $\frac{12}{144}=\frac{1}{12}$, que é um número racional, por ser o quociente exacto de dois números inteiros.

Grupo II

1. Representando por X a distribuição em causa, pretende-se calcular $p(X>\mu+\sigma)$. De acordo com o formulário, $p(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0{,}6827$. Pelas propriedades da distribuição normal, a probabilidade pedida é então de $\frac{1-0{,}6827}{2}\approx16\%$.

2. Por substituição na equação dada, $y=0{,}0290\times100+18{,}36=21{,}26$ graus Celsius.

3.1 $\text{tvm}_{[0,3]}=\frac{h(3)-h(0)}{3-0}\approx-20{,}7$.

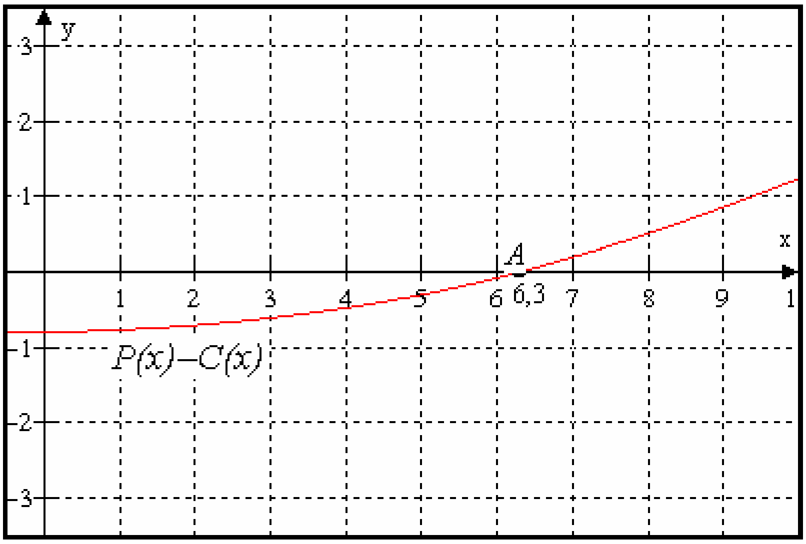
3.2. A partir do gráfico, obtém-se a seguinte tabela de variação

	0		5,4		9,6
$f=h'$	—	—	0	+	0
h	94,8		mínimo		45,5

No instante 5,4 a águia captura a lebre; com efeito, neste ponto, pela tabela anterior, a função h tem um mínimo e, de acordo com o enunciado, a captura ocorre quando a distância da águia ao fundo do vale (que é dada pela função h) é mínima.

4. Comecemos pela afirmação I: quando as árvores foram plantadas, $x=0$ e $P(0)=\dfrac{10}{1+12{,}5e^{-0{,}23\times 0}}\approx 0{,}741$ e $C(0)=\dfrac{6}{1+2{,}9e^{-0{,}12\times 0}}\approx 1{,}538$. Como a diferença entre estes dois valores **<u>não</u>** é 1,1, a afirmação é falsa.

Quanto à afirmação II, tracemos o gráfico da função definida por $P(x)-C(x)$, recorrendo à calculadora gráfica; verifica-se que esta função tem um zero em 6,3 (aproximadamente) e é negativa em [0; 6,3[e positiva em]6,3; +∞[, pelo que a afirmação é falsa.



Finalmente, passemos à afirmação III: a função P tem, em +∞, a assímptota horizontal $y=10$ e a função C a assímptota horizontal $y=6$, pelo que a afirmação é verdadeira.

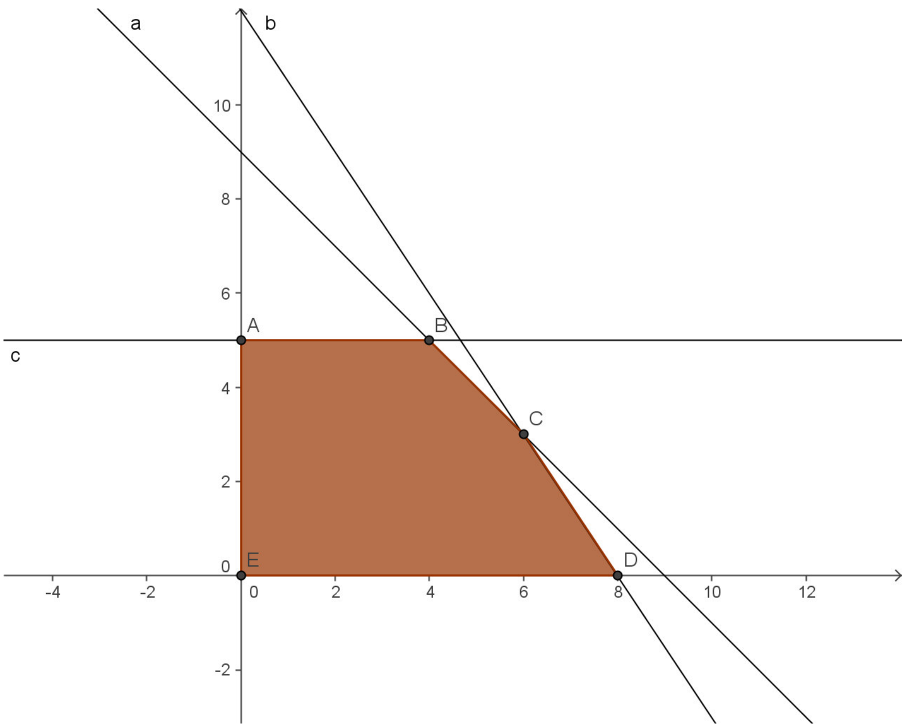
Grupo III

Função objectivo: $L=1600x+1200y$

Restrições:

$$\begin{cases} 0\le y\le 5 \\ 0\le x \\ 5x+5y\le 45 \\ 3x+2y\le 24 \end{cases}$$

Região admissível:



As rectas *a*, *b* e *c* têm as equações $5x+5y=45$, $3x+2y=24$ e $y=5$, respectivamente. Quanto aos vértices, as suas coordenadas são *A*(0, 5), *B*(4, 5), *C*(6, 3), *D*(8, 0) e *E*(0, 0). Calculando o valor da função objectivo em cada um destes pontos, verifica-se que o lucro máximo ocorre no ponto C que corresponde a produzir 6 toneladas de *PPremium* e 3 toneladas de *PRegular*.

Grupo IV

1. Trata-se de calcular a soma dos oito primeiros termos de uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 0,01 (euros) e a razão é 2.

$$S_8 = 0{,}01 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 2{,}55 \text{ (euros)}.$$

2. Trata-se agora de calcular a soma dos primeiros 32 termos da referida progressão.

$$S_{32} = 0{,}01 \times \frac{1-2^{32}}{1-2} = 42949672{,}95 > 4000000.$$

Grupo V

1. No triângulo [*ABC*], $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, donde se tem imediatamente que $\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$; resolvendo em ordem a *R*, vem $R = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, como queríamos.

2. Pela fórmula da alínea anterior, $R = \frac{2{,}35 \times \cos(1{,}5564°)}{1-\cos(1{,}5564°)} \approx 6367{,}47$; sendo o valor determinado por Eratóstenes de 6316 km, a diferença entre os dois valores é de 51 km, com arredondamento às unidades.

FIM