Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. da República 45, 3º esq, 1050–187 Lisboa
Tel. 21 793 9785 / Fax 21 795 2349

www.spm.pt gebs@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame Nacional de Matemática B

Prova 735, 2.ª Fase – 16 de Julho de 2009

Grupo I

1. Construamos uma tabela de dupla entrada ilustrando a situação

+	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**
1	2	2	2	2	3	3	4	4
1	2	2	2	2	3	3	4	4
1	2	2	2	2	3	3	4	4
1	2	2	2	2	3	3	4	4
2	3	3	3	3	4	4	5	5
2	3	3	3	3	4	4	5	5
3	4	4	4	4	5	5	6	6
3	4	4	4	4	5	5	6	6

Da tabela constata-se que há 16 maneiras de sair a soma "2" em 64 casos possíveis. Assim, a probabilidade de sair soma "2" é de $16/64=1/4=0{,}25$. Procedendo de forma análoga para as restantes somas, obtém-se a tabela

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,25	0,25	0,3125	0,125	0,0625

2. $\bar{x} = 1 \times 0{,}55 + 2 \times 0{,}20 + 3 \times 0{,}25 = 1{,}7$

Grupo II

1. Uma possível resolução é:

- A área do quadrado [*ABCD*] é igual a l^2 e a área do quadrado [*PQRS*] é igual a $\overline{SP}^2$;

- Da figura, $\overline{SA} = \frac{l}{2}$;

- Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo [*ASP*], vem que $\overline{SP}^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$, donde se conclui que $\overline{SP}^2 = \frac{l^2}{2}$, como queríamos.

2. De acordo com a alínea anterior, a área da primeira pedra preciosa é $\frac{4^2}{2} = 8$; pela mesma alínea reconhece-se imediatamente que a sequência em causa é uma progressão geométrica de razão 0,5. Escrevamos alguns termos, até surgir 0,25:

8; 4; 2; 1; 0,5; 0,25. A soma pedida é assim $8+4+2+1+0,5+0,25=15,75$.

Grupo III

1. Sejam *y*, *h* e *v* os comprimentos dos lados horizontais do mural, horizontais da tapeçaria e verticais da tapeçaria, respectivamente. Da figura, é óbvio que

$v = x - 0,5 - 05 = x - 1$.

Por outro lado, $x + x + y + y = 26 \Leftrightarrow y = 13 - x$ e

$y = 1 + 1 + h \Leftrightarrow y = 2 + h$

Por comparação destas expressões, $13 - x = 2 + h \Leftrightarrow h = 11 - x$, como queríamos.

2. Usando as notações anteriores, a área da tapeçaria é igual a

$$v \times h = (x-1)\cdot(11-x) = -x^2 + 12x - 11 \text{, com } x \in \left]1, 11\right[.$$

3. Do estudo da função quadrática, sabe-se que o maximizante (trata-se de um maximizante porque o coeficiente do termo do segundo grau é negativo) é igual à média aritmética dos dois zeros de $A(x)$; como estes são 1 e 11, o valor para o qual a área da tapeçaria é máxima é 6.

   Esta questão pode ser resolvida por outros métodos, como, por exemplo, o recurso às capacidades gráficas da calculadora.

Grupo IV

1.1. A diferença pedida é $8-\left(26{,}6723-10{,}9399\times\ln(8)\right)\approx 4{,}1$, com aproximação às décimas.

1.2. De acordo com o modelo, $P(1)=26{,}6723-10{,}9399\times\ln(1)=26{,}6723$ e o resultado

é $0{,}266723\times 216=57{,}612168\approx 58$.

2. Da equação $0{,}058=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ vem $1+\frac{1}{n}=10^{0{,}058}$, ou seja,

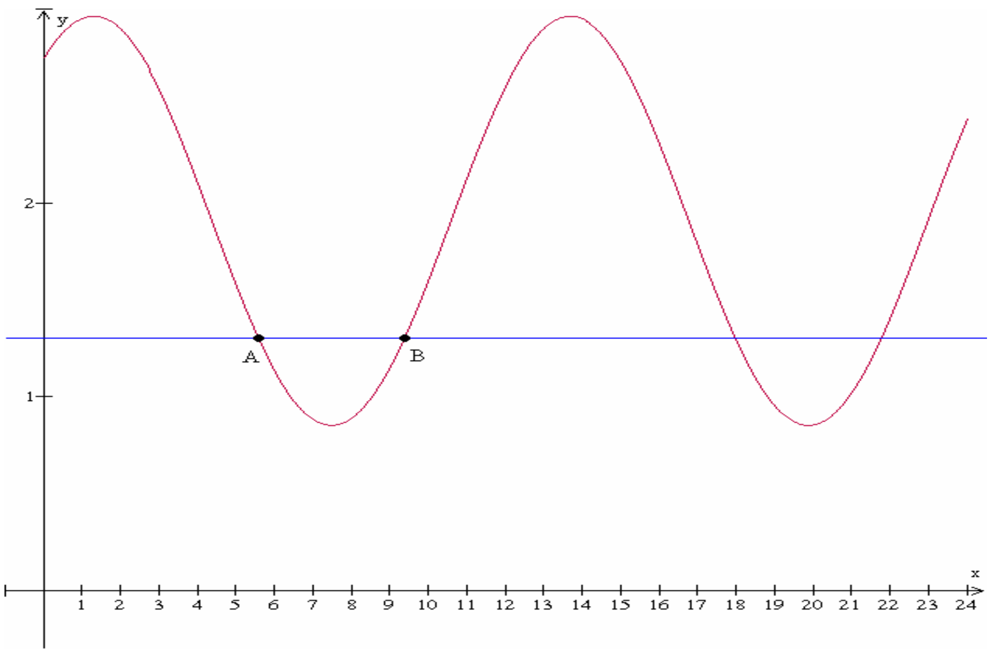
$$n=\frac{1}{10^{0{,}058}-1}\approx 7$$

O algarismo é 7.

Grupo V

1. O período da manhã termina às 12 horas. Esbocemos o gráfico da função dada em

[0, 24] e tracemos a recta horizontal de equação $y=1{,}3$.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o ponto A tem a abcissa 5,6012 e o ponto B a abcissa 9,3747, que correspondem a 5 horas e 36 minutos e a 9 horas e 22 minutos, respectivamente.

2. O tempo que o barco ficou encalhado é de 23,53-6,11=17,42 horas, que corresponde

a 17 horas e 25 minutos; assim, o primeiro valor a negrito está incorrecto. Quanto ao segundo, se calcularmos o valor da derivada da função *M* (recorrendo à função

NDeriv da calculadora, por exemplo), no ponto de abcissa 23,53, verificamos que o

seu valor é de 0,51 (com duas casas decimais), pelo que o segundo valor numérico também está mal. Finalmente o mínimo desta função no intervalo [6,11; 23,53] é aproximadamente de 0,853 (resultado obtido recorrendo à calculadora) e a diferença de nível é portanto de 2,2-0,853≈1,3 e não de 1,5 metros, conforme erradamente se dizia na notícia.

FIM