Sociedade Portuguesa de Matemática

Av. da República 45 - 3ºesq., 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349

www.spm.pt imprensa@spm.pt

Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame de Matemática B

Prova 735, 2ª fase – 19 de Julho de 2010

Grupo I

1.1 Consideremos a progressão aritmética (u_n), em que o primeiro termo é 4 e a razão 16 = 20 – 4.

Tem-se que $u_n = 4 + (n-1) \times 16 = 16n - 12$; como a solução de $16n - 12 = 456$ é 29,25, que não é um número natural, conclui-se que nenhuma destas linhas poligonais tem 456 lados.

1.2 32 m = 3200 cm; recorrendo à progressão aritmética da questão anterior, vem

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = \frac{4 + 16n - 12}{2} \times n = 8n^2 - 4n$$

e basta resolver (no conjunto $\mathbb{N}$) a inequação $8n^2 - 4n > 3200$, recorrendo a uma tabela (ou à calculadora: $8n^2 - 4n - 3200 > 0 \Leftrightarrow n < -19.75 \ldots \vee \quad n > 20{,}25 \ldots$) devendo escolher-se o valor 21.

2.1 O lado de cada um dos quatro quadrados menores é 6, que coincide com o raio de círculo. Assim temos:

- Área sombreada no quadrado $[ABOQ]$: $\frac{\pi \times 6^2}{4}$
- Área sombreada no quadrado $[BCRO]$: $\frac{\pi \times 6^2}{4}$
- Área sombreada no quadrado $[QOPU]$: $6^2 - \frac{\pi \times 6^2}{4}$
- Área sombreada no quadrado $[ORSU]$: $6^2 - \frac{\pi \times 6^2}{4}$

Adicionando as expressões anteriores, a área sombreada é de $6^2 + 6^2 = 72$.

Analogamente:

- Área não sombreada no quadrado [*ABOQ*]: $6^2 - \frac{\pi \times 6^2}{4}$
- Área não sombreada no quadrado [*BCRO*]: $6^2 - \frac{\pi \times 6^2}{4}$
- Área não sombreada no quadrado [*QOPU*]: $\frac{\pi \times 6^2}{4}$
- Área não sombreada no quadrado [*ORSU*]: $\frac{\pi \times 6^2}{4}$

e a área não sombreada é de $6^2 + 6^2 = 72$. As duas áreas são portanto iguais.

2.2.1 Amplitude: $180°$.

Centro: o ponto *R*.

2.2.2 Eixo de simetria: a recta *PS*.

3. Como se encomendaram 1000 exemplares, $x = 10$ centenas.

$C(10) = 500 \times 10 + 8000 = 13000$.

A quantia resultante da venda referida é $800 \times 15 = 12000$, que é inferior ao valor de $C(10)$ anteriormente determinado. A afirmação é verdadeira.

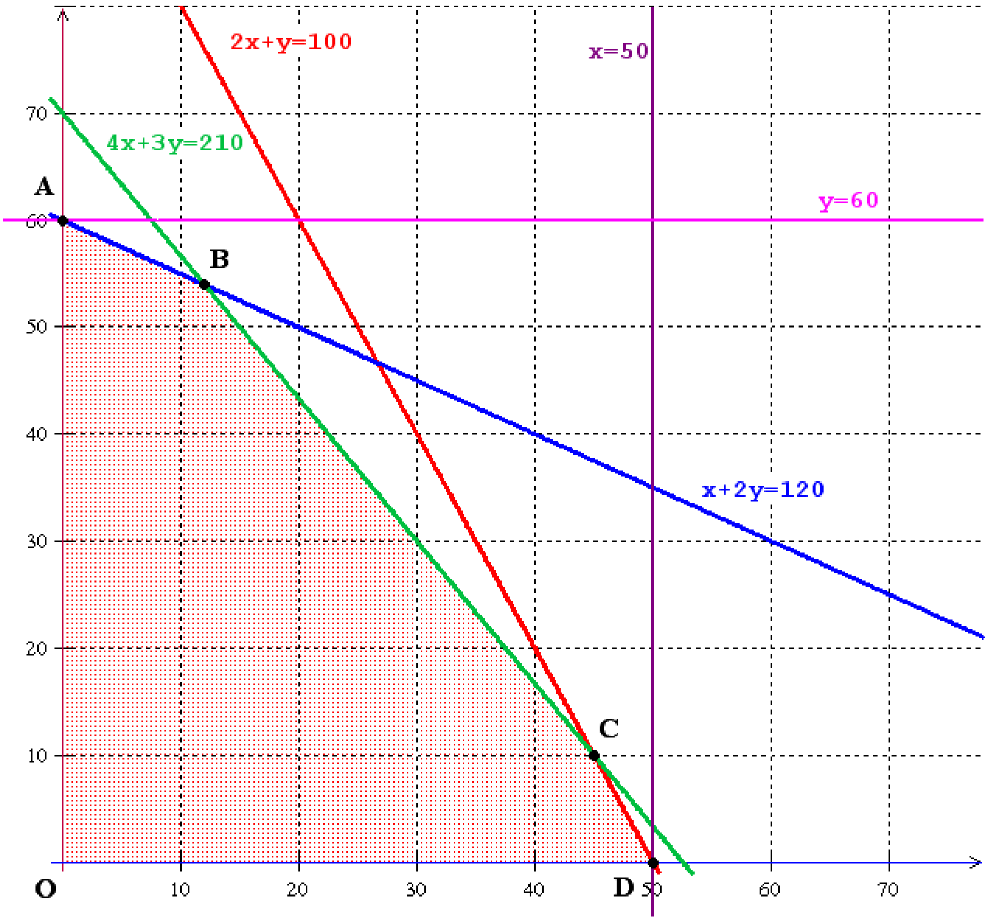
GRUPO II

1. Função objectivo: $L = x + y$

Restrições: para além de x e y terem de ser números não negativos e menores ou iguais a 50 e 60 (note-se que tanto x como y se referem a *dezenas* de quartos), tem-se

$$\begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 120 \\ 4x + 3y \leq 210 \end{cases}$$

A primeira restrição é relativa aos recepcionistas, a segunda aos empregados de bar e a terceira aos funcionários do serviço de quartos. Graficamente, tem-se a seguinte região admissível



As coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *O*, vértices da região admissível, bem como o valor da função objectivo *L*, são dadas na seguinte tabela:

Pontos	Valor da função objectivo
A (0,60)	60
B(12; 54)	66
C(45; 10)	55
D(50,0)	50
O(0,0)	0

Concluímos que o máximo é atingido no ponto B, correspondendo a 120 quartos no hotel VISTASERRA e 540 no hotel VISTAMAR.

2. 1 Da figura, $\theta + 90° + \alpha = 180°$, donde $\theta = 90° - \alpha$;

Do triângulo [*ABC*], $\alpha + 90° + A\hat{B}C = 180°$, donde $A\hat{B}C = 90° - \alpha$. Conclui-se então que $A\hat{B}C = \theta$.

Finalmente, no triângulo rectângulo [*ABC*], $\cos\left(A\hat{B}C\right) = \frac{h}{5}$, donde $h = 5\cos\,(A\hat{B}C)$ e portanto, $h = 5\cos\theta$.

2.2 De $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2,5}{5}$, conclui-se que $\alpha = 30°$; de $2,5 = 5\cos(\theta)$, vem que $\theta = 60°$.

GRUPO III

1. Para que o produto seja par, pelo menos um dos factores tem de ser par.

Assim, se listarmos na forma de pares ordenados os 20 resultados possíveis,

(1, 10); (1, 15); (1, 20); (1, 25)

(2, 10); (2, 15); (2, 20); (2, 25)

(3, 10); (3, 15); (3, 20); (3, 25)

(4, 10); (4, 15); (4, 20); (4, 25)

(5, 10); (5, 15); (5, 20); (5, 25),

concluímos que há 14 casos em que o produto é um número par; em alternativa, podíamos verificar que há exactamente 6 casos em que os dois factores são ímpares e portanto o número pedido é $20 - 6 = 14$.

2. Conforme assinalado anteriormente, há $20 = 5 \times 4$ resultados possíveis, correspondente ao produto do número de casos possíveis para o 1º número (5) pelo número de casos possíveis para o 2º número (4), atendendo a que as escolhas dos números são independentes

Relativamente ao 2º prémio (acertar o número na primeira fila e falhar na segunda), o número de casos favoráveis é $1 \times 3 = 3$, correspondente ao produto do número de casos favoráveis para o 1º número (1) pelo número de casos favoráveis para o 2º número (3); o primeiro factor é óbvio (só existe um caso favorável de entre os 5 possíveis). Quanto ao segundo, repare-se que o que nos interessa é **<u>não</u>** acertar no número, logo se o número estiver certo os outros três estarão errados. Pela regra de Laplace, a probabilidade é então 3/20.

Relativamente ao 3º prémio (acertar o número na segunda fila e falhar na primeira), o número de casos favoráveis é $4 \times 1 = 4$, correspondente ao produto do número de casos favoráveis para o 1º número (4) pelo número de casos favoráveis para o 2º número (1); o segundo factor é óbvio (só existe um caso favorável de entre os 4 possíveis). Quanto ao primeiro, repare-se que o que nos interessa é **<u>não</u>** acertar no número, logo se o número estiver certo os outros quatro estarão errados. Pela regra de Laplace, a probabilidade é então 4/20 = 1/5.

GRUPO IV

1. Resolvamos a equação $F(t) = 10000$.

Vem $\frac{57000}{1+4980\times e^{-0.27t}} = 10000 \Leftrightarrow 1 + 4980 \times e^{-0.27t} = \frac{57}{10} \Leftrightarrow e^{-0.27t} = \frac{1}{4980} \times \left(\frac{57}{10} - 1\right)$

$-0.27t = \ln\left(\frac{4{,}7}{4980}\right) \Leftrightarrow t \approx 25{,}799$. Em alternativa, pode-se obter o mesmo valor por via gráfica.

Analogamente, de $F(t) = 20000$, vem $t \approx 29{,}252$.

O número de semanas é pois $29{,}252 - 25{,}799 = 3{,}453$ correspondente a 3 semanas e 3 dias.

2. O número de pessoas contagiadas nas condições da alínea é $F(60)$. Por substituição, tem-se que $F(60) = \frac{57000}{1+4980\times e^{-0.27\times 60}} \approx 56973{,}858$.

A percentagem pedida é assim $\frac{56973{,}858}{950000} \times 100 = 6$, com aproximação às unidades.

3. Esta afirmação significa que, 30 semanas após o início do ano 2000, o número de novos casos, por semana, é superior à mesma grandeza ao fim de 40 semanas. Podemos concluir que a abcissa 30 está ainda na zona de crescimento acelerado, ao passo que a abcissa 40 já está na zona de crescimento mais lento.

FIM