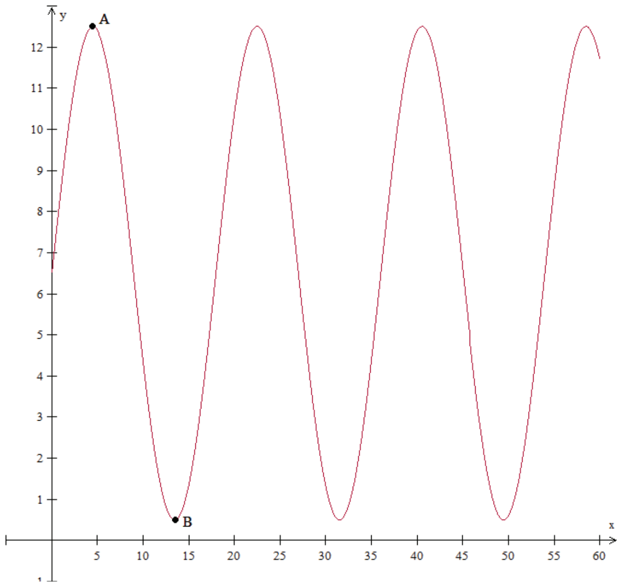
Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
para o Exame Nacional de Matemática B
Prova 735, 2ª fase – 27 de Julho de 2011

GRUPO I

1. Consideremos o gráfico da função d no intervalo sugerido:

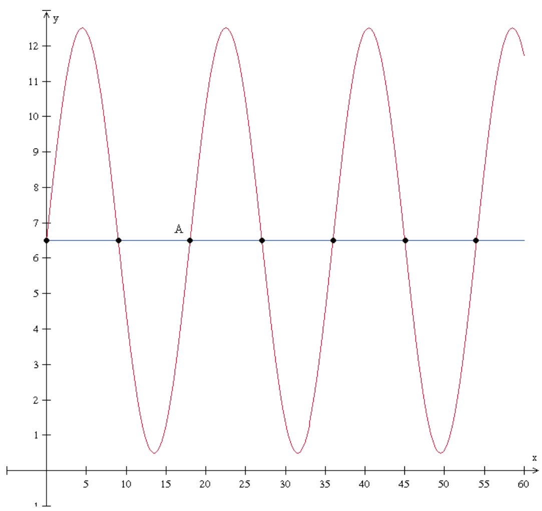


Os pontos A e B têm ordenadas 12,5 e 0,5, respectivamente. Da figura 2 da prova resulta que

$$12{,}5 = 2\overline{OV} + 0.5$$

donde $\overline{OV} = 6$ e assim o comprimento de uma vara é de 6 metros.

2. Acrescentemos ao gráfico da alínea anterior a recta horizontal definida por $y = 6{,}5$ (repare-se que $d(0) = 6{,}5$).



A abcissa do ponto A é 18, donde se conclui que o ponto V demora 18 segundos a dar uma volta completa. Os 15 minutos de movimento correspondem a 900 segundos, pelo que o ponto V dá 50 voltas completas ($50 = \frac{900}{18}$).

Como em cada volta o ponto V está duas vezes a 6,5 metros do solo, concluímos que o número total de vezes que o ponto V está à altura de 6,5 metros do solo é $101 = 2\times 50 + 1$, já que os extremos do intervalo estão incluídos.

3.1. O ângulo ao centro do octógono regular mede $\frac{360°}{8} = 45°$; o ângulo côncavo BOG mede pois $5\times 45° = 225°$. Uma resposta é a rotação de centro O e amplitude $225°$.

3.2. As coordenadas do ponto B são $\sqrt{2}(\cos 45°, \operatorname{sen} 45°) = (1,1)$. Assim, as coordenadas do ponto pedido são $(-1,1)$.

GRUPO II

1. A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão 0,5 e primeiro termo 32.
Assim, $S_7 = 32\times \frac{1-0{,}5^7}{1-0{,}5} = 63{,}5$.

2. $S_n = 32\times \frac{1-0{,}5^n}{1-0{,}5} = 64\times(1-0{,}5^n)$;

Igualando a última expressão a 64 e simplificando, obtém-se a equação impossível $0{,}5^n$=0, pelo que a soma das áreas nunca pode ser igual a 64.

GRUPO III

1. Constrói-se uma tabela de dupla entrada:

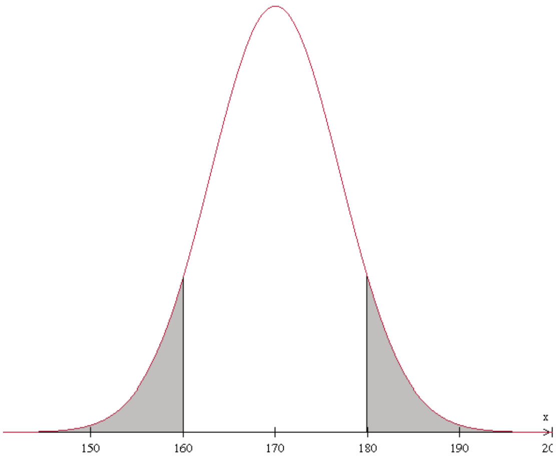
×	**-1**	**-1**	**0**	**1**	**1**	**1**
-1	1	1	0	-1	-1	-1
-1	1	1	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0
1	-1	-1	0	1	1	1
1	-1	-1	0	1	1	1
1	-1	-1	0	1	1	1

Há 36 casos possíveis no lançamento dos dois dados e a distribuição de probabilidades é

y_i	-1	0	1
$P(Y = y_i)$	$\frac{12}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{13}{36}$

2. Afirmação I:

Como os números 160 e 180 estão distribuídos simetricamente em relação à média 170 (ver o gráfico seguinte, onde as áreas a cinzento são iguais), segue-se da simetria da distribuição normal, que as duas probabilidades referidas são iguais e a afirmação é falsa



Afirmação II:

A probabilidade referida é

$p(160 \leq X \leq 170 \vee X > 180)$, que é igual a $p(160 \leq X \leq 170) + p(X > 180)$; como a última parcela é igual a $p(X < 160)$ (pela simetria da distribuição normal), vem que

$$\begin{aligned} p(160 \leq X \leq 170 \vee X > 180) &= p(160 \leq X \leq 170) + p(X < 160) \\ &= p(X < 160) + p(160 \leq X \leq 170) = p(X \leq 170) = 0{,}5 \end{aligned}$$

de novo pelas propriedades da distribuição normal. A afirmação II é falsa.

Afirmação III:

Como uma distribuição normal fica bem caracterizada pelo seu valor médio e pelo desvio padrão, basta ver que se Y é uma distribuição normal com valor médio 170 e desvio padrão 7, então $p(Y > 184) = 0{,}02275$. Esta igualdade é equivalente a

$$p(Y \leq 184) = 1 - 0{,}02275 = 0.9725,$$

e esta é imediata recorrendo à instrução *normalcdf* da calculadora gráfica (usar, por exemplo, $normalcdf(-20$,184,170,7)). A afirmação III é verdadeira.

Está assim justificada a correcção da classificação feita pelo Diogo.

GRUPO IV

1.1 A concentração inicial é $C(0) = 100$. Temos pois de resolver a equação $\frac{600}{0{,}16t^2-0{,}8t+6} = \frac{100}{2}$, que é equivalente a $0{,}16t^2 - 0{,}8t + 6 = 12$ (note-se que o trinómio em denominador nunca se anula). Esta última equação tem as raízes 9,114378…. e $-4{,}114378$ ..., só convindo ao problema a primeira. Concluímos assim que a concentração ficou reduzida a metade no ano de 2004.

1.2 Seja x_0 o instante em causa. Como a taxa de variação instantânea muda de sinal em x_0, passando de positiva a negativa, concluímos que x_0 é maximizante da função dada. Assim, a concentração aumentou desde o início da experiência até este instante, diminuindo a partir daí.

2.1 O valor pedido é $\frac{N(8)-N(2)}{8-2} = \frac{\frac{20\times8+2}{8+2}-\frac{20\times2+2}{2+2}}{6} = 0{,}95$ (milhares de trutas), que corresponde a 950 trutas.

2.2 Comecemos por reparar que 22000 trutas correspondem a 22 milhares de trutas. O gráfico da função *N* é uma hipérbole equilátera cujas assíntotas são $x = -2$ e $y = 20$; como apenas estamos interessados em valores não negativos de *x*, só consideraremos a segunda. Como o gráfico de uma hipérbole equilátera não intersecta as suas assíntotas e a função *N* é crescente, concluímos que o número de trutas no lago nunca poderá vir a atingir o valor que foi estimado antes das descargas poluentes.
Uma alternativa seria mostrar que a equação $N(x) = 22$ é impossível para $x \geq 0$.

3. Somos levados à inequação $\log_2(n) \geq 4{,}3$.

Vem: $\log_2(n) \geq 4{,}3 \Leftrightarrow n \geq 2^{4,3} \Leftrightarrow n \geq 19{,}698$ ....

Concluímos assim que deverá haver pelo menos 20 espécies diferentes no aquário.

FIM