Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática

para o Exame Nacional de Matemática B

Prova 635, 1ª fase – 25 de Junho de 2013

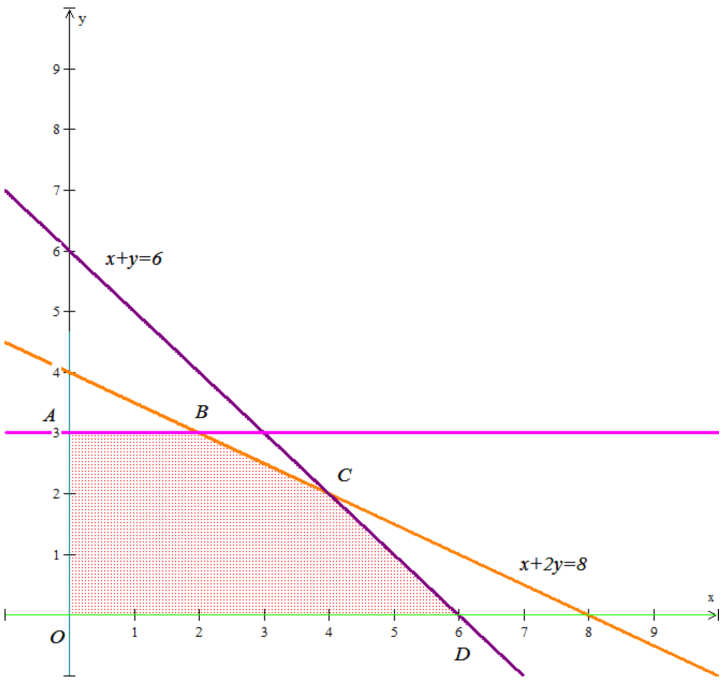
GRUPO I

1. A função objectivo, que se pretende maximizar, é $L = 500x + 600y$. Quanto às restrições do problema, o facto de a totalidade das vendas não dever ultrapassar 6 mil toneladas, leva-nos a $x + y \leq 6$, a restrição relativa ao mercado externo a $y \leq 3$ e a restrição das despesas a $2000x + 4000y \leq 16000$, ou, simplificando, $x + 2y \leq 8$.

O sistema das restrições é assim

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \\ y \leq 3 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

A região admissível é



As coordenadas dos pontos *A*, *D* e *O* são (0,3), (6, 0) e (0, 0), respectivamente; quanto aos pontos *B* e *C*, basta resolver os sistemas

$\begin{cases} y = 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ para se concluir que as suas coordenadas são (2, 3) e (4, 2), respetivamente. Calculando o valor da função objectivo nos cinco vértices da região admissível, verifica-se que o máximo é 3200, atingido no ponto *C*. Devemos pois vender 4000 toneladas de azeito no mercado interno e 2000 toneladas de azeite no mercado externo.

2.1 Para determinar a quantidade de azeite vendido na sétima semana, devemos calcular $V(7) - V(6)$.

$$V(7) - V(6) = \frac{550}{1+e^{-0,42\times 7}} - 275 - \left(\frac{550}{1+e^{-0,42\times 6}} - 275\right) \approx 13{,}34\ l = 1334\ cl$$

Como $\frac{1334}{75} = 17{,}786$ ..., concluímos que o número pedido é 17.

2.2 Basta calcular $V(10) \times (1 - 0{,}43)$; por arredondamento às unidades, o valor é de 152 l.

GRUPO II

1. Representemos por (E, D) o acontecimento "descida pela esquerda, seguido de descida pela direita" e por (D,E)) o acontecimento "descida pela direita, seguido de descida pela esquerda". Em cada prego, a probabilidade de a bola cair para a esquerda ou para a direita é igual. A probabilidade pedida é

$$p = p(E, D) + p(D, E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. O enunciado leva-nos a considerar uma progressão aritmética em que tanto o primeiro termo como a razão são iguais a 1. Pretendemos calcular S_{100}. Vem

$$S_{100} = \frac{100+1}{2} \times 100 = 5050.$$

3. Seja x o número de pregos na última linha. Tem-se que $x + (x - 1) = 435$, donde $x = 218$. Há pois 218 pregos na última linha e 219 cavidades.

4. Comecemos por calcular $p(59{,}5 < X < 83{,}5)$, sendo $X \sim N(76{,}5; 6{,}1)$. Recorrendo à calculadora, o valor desta probabilidade é, com quatro casas decimais, 0,8718. O número de bolas é $0{,}8718 \times 5000 = 4359$.

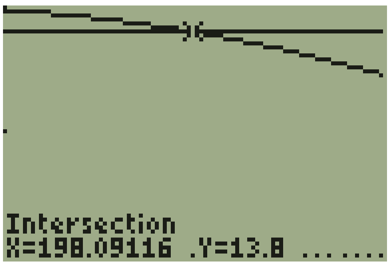
GRUPO III

1. Coloquemos na lista L_1 da calculadora os dados da coluna "Ordem do dia" e na lista L_2 os dados da coluna "Comprimento do dia no Funchal". Recorrendo à regressão sinusoidal, obtemos os seguintes valores:

$$\begin{cases} a = 2{,}126 \\ b = 0{,}017 \\ c = -1{,}342 \\ d = 12{,}133 \end{cases}$$

Recorrendo aos valores acima e tendo em conta que 1 de Dezembro é o 336º (366-30) dia de um ano bissexto, vem $F(336) = 10{,}1294 \ldots \approx 10$ horas.

2. 1 e 31 de Julho são, respectivamente, o 183º e 213º dias de um ano bissexto. SE tivermos em conta que 13h 48m = 13,8 h, basta traçar o gráfico de *C*(*x*) em [183, 213] e ver para quantos valores inteiros o gráfico está acima da recta $y = 13.8$. Verifica-se que isso acontece para 183, 184,…,198 (ver gráfico). Portanto, temos a considerar um total de $198 - 183 + 1 = 16$ dias.



GRUPO IV

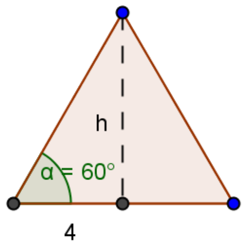
1.1 O perímetro pedido é a soma dos comprimentos $\overline{EA}, \overline{AB}$ e $\overline{CB}$ com o dobro do comprimento do arco *ED* (os arcos *ED* e *DC* são iguais). O valor pedido é pois

$$10 + 8 + 10 + 2 \times \frac{\pi \times 60}{180} \times 8 \approx 44{,}76.$$

1.2 Tem-se que $A = \frac{60 \times \pi \times 8^2}{360} \approx 33{,}5$ dm^2

1.3 A área pedida é a soma das áreas do rectângulo [*ABCE*] e do sector circular *CDE*, devendo depois subtrair-se a área do triângulo equilátero [*EDC*].

Da figura, $tan\, 60^0 = \frac{h}{4}$, donde $h = 4\sqrt{3}$



e a área pedida é $8 \times 10 + 2 \times 33{,}51 - \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} \approx 119$ dm^2

2. 9,4 e 5,9 são os valores das dimensões em dm para os quais a área da face exterior da janela é máxima.

3. A afirmação A) é verdadeira, pois $P(5) = 10^{-0.001 \times 20 \times 5 + 1} \approx 79 > 75.$

A afirmação B) é falsa, pois de $P(x) = 70$ vem $x = \frac{\log_{10}(70) - 2}{-0{,}005} \approx 31 > 20.$

Quanto à afirmação C), se x for a espessura do vidro mais fino, a espessura do vidro mais grosso será $x + 15$. Calculando $\frac{P(x+15)}{P(x)}$, verifica-se que este valor é igual a $10^{-0{,}3}$ que é aproximadamente 0,5, e portanto a afirmação está correcta.

FIM