Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 18 DE JULHO 2013

GRUPO I

1.1. Como o professor não abriu a porta com a primeira chave, ficou com duas chaves na mão com igual probabilidade de abrir a porta. Logo a probabilidade pedida é 0,5.

1.2. A variável aleatória X pode tomar os valores 1, 2 ou 3.

A probabilidade de abrir a porta à primeira tentativa é $\frac{1}{3}$.

A probabilidade de abrir a porta à segunda tentativa é $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ porque corresponde ao acontecimento "não abrir à primeira tentativa e abrir à segunda tentativa".

A probabilidade de abrir a porta à terceira tentativa é $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1$ porque corresponde ao acontecimento "não abrir à primeira tentativa e não abrir à segunda tentativa e abrir à terceira tentativa".

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Introduzindo esta tabela nas listas da calculadora, obtém-se $\sigma\approx 0{,}8$.

2. O número de peças em cada quadrado do tabuleiro é uma progressão geométrica, como primeiro termo 1 e razão 2. O número de peças necessárias para preencher metade do tabuleiro é a soma dos 32 primeiros termos dessa sucessão:

$$S = 1\times\frac{1-2^{32}}{1-2} = 4\,294\,967\,295$$

Tendo em atenção que uma peça demora 2 segundos a colocar,

Em 1 minuto: 30 peças
Em 1 hora: $30\times60 = 1\,800$
Em 1 dia: $24\times1800 = 43\,200$
Em 1 ano: $365\times43200 = 15\,768\,000$
Em 100 anos: $100\times15768000=1\,576\,800\,000$

O Rui está correto porque o número de peças colocadas em 100 anos é menos de 2 mil milhões, muito inferior aos mais de 4 mil milhões necessários para cobrir metade do tabuleiro.

GRUPO II

1.1. O oitavo registo da temperatura foi feito $7\times5 = 35$ minutos depois do primeiro.

$T(0) = 18 + 70$
$T(35) = 18 + 70 \times e^{-1,75}$

$T(35) - T(0) = 18 + 70 \times e^{-1,75} - (18 + 70) = -57,8358...$

A variação da temperatura durante os 35 minutos foi de cerca de –58°C, a temperatura desceu cerca de 58°.

1.2. Se a taxa de variação instantânea da função T para t=1 é aproximadamente -3,3°C/min, então, ao fim de um minuto após o primeiro registo a temperatura do chá está a decrescer a uma taxa de 3,3°C por minuto.

2.1. Se a solução é neutra, então tem pH igual a 7.

$$-\log_{10}(x) = 7$$
$$\log_{10}(x) = -7$$
$$x = 10^{-7}$$

O valor obtido pelo aluno para a concentração de iões é 10^{-7}mol/dm^3.

2.2. **I)** A água do mar tem uma concentração de 1×10^{-8}

$y = -\log_{10}(10^{-8}) = 8$ O pH da água do mar é superior 7, logo a afirmação é verdadeira.

II) A lixívia tem uma concentração de $3,16\times10^{-14}$

$y = -\log_{10}(3,16\times10^{-14}) = 13,500...$ A afirmação é falsa

II) O chá tem uma concentração de $3,16\times10^{-6}$ e o sumo de limão tem uma concentração de $5,01\times10^{-3}$

Chá	Sumo de limão
$y = -\log_{10}(3,16\times10^{-6})$	$y = -\log_{10}(5,01\times10^{-3})$
$y = 5,50031...$	$y = 2,30016...$

O triplo de 2,3 é 6,9, por isso a afirmação é falsa.

GRUPO III

1. Área relvado $= \frac{1}{2} \times$ área círculo de diâmetro PR $+ \frac{1}{2} \times$ área círculo de diâmetro RQ

Área relvado $= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{PR}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\overline{RQ}}{2}\right)^2$

Área relvado $= \frac{\pi}{8} \times \overline{PR}^2 + \frac{\pi}{8} \times \overline{RQ}^2$

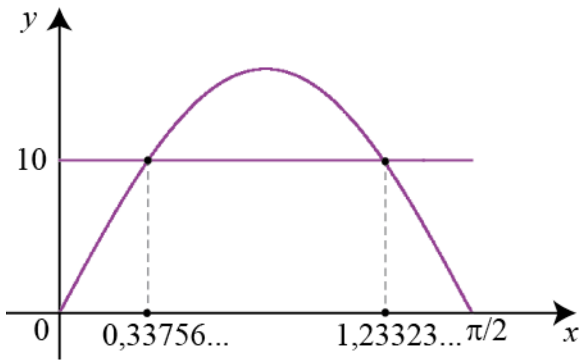
Área relvado $= \frac{\pi}{8} \times \left(\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2\right)$

Mas, o triângulo *PRQ* é retângulo, pelo teorema de Pitágoras $\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2$

Então

Área relvado $= \frac{\pi}{8} \times 8^2 = 8\pi$

2.1. Introduzindo na calculadora as funções $y_1 = 32.\text{sen}\, x.\cos x$ e $y_2 = 10$
obtivemos a seguinte representação gráfica



Utilizando a função Calc – Intersect da máquina, obtivemos os seguintes valores de α, que correspondem à área 10 m^2. Por leitura do gráfico, tem-se que $A(\alpha)>0$ quando

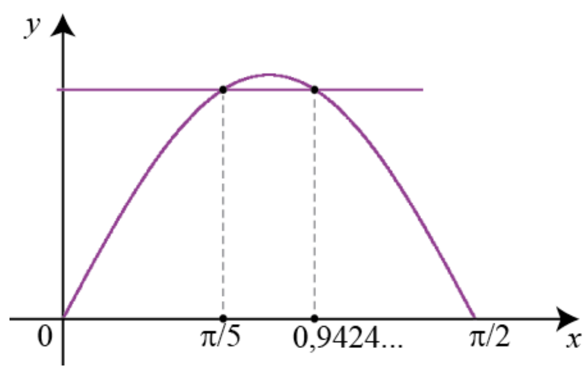
$$\alpha \in]0{,}38;\ 1{,}23[$$

2.2. Para que a taxa de variação média seja 0 tem que se verificar $A\left(\frac{\pi}{5}\right) = A(c)$

Introduzindo na calculadora as funções

$y_1 = 32.\text{sen}\, x.\cos x$ e $y_2 = y_1\left(\frac{\pi}{5}\right)$

obtivemos a seguinte representação gráfica

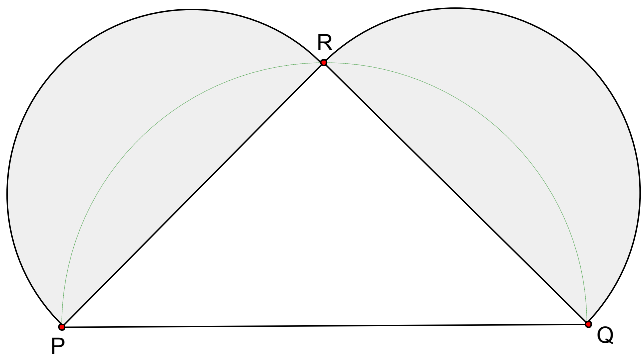


Utilizando a função Calc – Intersect da máquina, obtivemos c ≈ 0,94 rad.

2.3. $F(\alpha)>0$ em $]0, \frac{\pi}{4}[$ significa que a função A é crescente neste intervalo, ou seja, para ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{4}$ rad a área do relvado é tanto maior quanto maior for o ângulo.

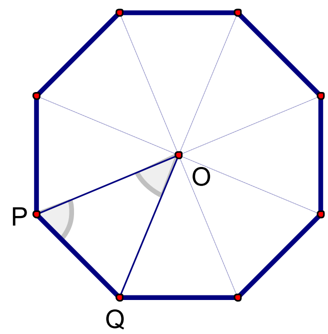
$F(\alpha)<0$ em $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ significa que a função A é decrescente neste intervalo, ou seja, para ângulos entre $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ rad a área do relvado é tanto menor quanto maior for o ângulo.

Então a função A tem o seu máximo no zero da função F, ou seja, o relvado com a maior área corresponde ao ângulo de $\frac{\pi}{4}$ rad**,** que dá origem à figura em que o triângulo PQR é isósceles e os dois semi-círculos são iguais.



GRUPO IV

1.1. Para determinar a medida do ângulo interno do octógono regular, podemos dividi-lo em oito triângulos isósceles iguais, como na figura.



$P\hat{O}Q = 360° : 8 = 45°$

$O\hat{P}Q = \frac{180° - 45°}{2} = \frac{135°}{2}$

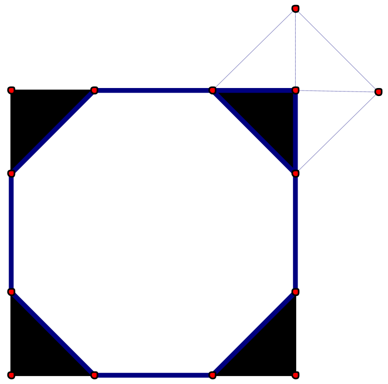
O ângulo interno do octógono regular é $2 \times \frac{135°}{2} = 135°$.

Se pavimentarmos com dois octógonos regulares, a soma dos dois ângulos em cada vértice é

$$2 \times 135° = 270°$$

portanto, o ângulo interno do terceiro polígono será $360° - 270° = 90°$. Como o polígono é regular, tem os lados todos iguais e os ângulos de 90°, então é um quadrado.

1.2.1. O esquema do chão da sala pode ser dividido em $m \times n$ quadrados como o da figura, que contêm, cada um, um mosaico branco, octogonal e quatro quartos do mosaico preto, quadrado.



O lado de cada um destes quadrados é igual à soma do lado do octógono, 18 cm, com uma (duas metades) diagonal do quadrado, $18\sqrt{2}$ cm.

Então, convertendo as medidas do chão em cm:

$$(18+18\sqrt{2})\times m = 1130 \quad e \quad (18+18\sqrt{2})\times n = 1043$$

$$m = \frac{1130}{18+18\sqrt{2}} \text{ e } n = \frac{1043}{18+18\sqrt{2}}$$

$$m = 26{,}003.... \text{ e } n = 24{,}001...$$

Então, o chão da Sala das Bicas pode ser dividido em $m \times n = 26\times 24 = 624$ quadrados destes, logo necessita de 624 mosaicos brancos.

1.2.2. Como o número de mosaicos pretos (inteiros ou decompostos em partes) é igual ao número de quadrados calculados na alínea anterior, 624, e a área de cada mosaico preto, em m^2 é $0{,}18^2$, a área total dos mosaicos pretos é:

$$0{,}18^2\times 624 = 20{,}2176$$

A área pedida é aproximadamente 20 m^2.

2. Seja l o comprimento do lado do quadrado, em cm. Então o perímetro é $4l$ e a área é l^2.
Como estes três números estão em progressão aritmética, tem-se

$$l^2 - 4l = 4l - l$$
$$l^2 - 7l = 0$$
$$l(l-7) = 0$$
$$l = 0 \text{ ou } l = 7$$

O lado do quadrado mede 7 cm.

FIM