REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | Época Especial | Ensino Secundário | 2018

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Numa aula de Física, realizaram-se duas experiências.

1. Na primeira experiência, colocou-se uma esfera suspensa do tampo de uma mesa por uma mola elástica, como sugere a Figura 1.

Após ter sido alongada verticalmente, a mola iniciou um movimento oscilatório vertical.

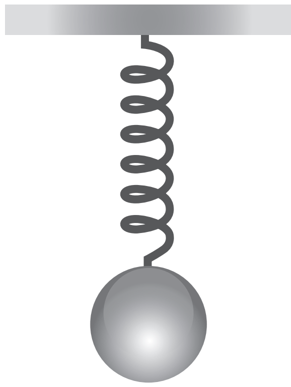

Figura 1

1.1. Desde o instante em que se largou a mola, $t = 0$, e durante 3 segundos, registaram-se os valores da distância, h , em centímetros, do centro da esfera ao tampo da mesa.

Os dados obtidos apresentam-se na tabela seguinte.

t (s)	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
h (cm)	10,6	9,1	9,4	10,8	10,6	9,2	9,4	10,8	10,6	9,2	9,4	10,8	10,6

Considere válido um modelo de regressão sinusoidal, $y = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$ (em que a , b , c e d são números reais), com o argumento da função seno em radianos, obtido a partir dos dados da tabela.

Estime, com base nesse modelo, a distância do centro da esfera ao tampo da mesa, decorridos $1{,}55$ segundos desde o instante em que se largou a mola.

Na sua resposta, apresente:

– os valores de a , b , c e d arredondados às milésimas;

– o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas.

Se efetuar cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

1.2. Admita, agora, que a distância, h , em centímetros, do centro da esfera ao tampo da mesa, desde o instante em que se largou a mola e durante os primeiros 3 segundos, é dada por

$$h(t) = 10 + \cos(6{,}3\,t + 0{,}9) \quad , \quad \text{com } t \in [0, 3]$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Na posição de equilíbrio da mola, a distância do centro da esfera ao tampo da mesa corresponde à média das distâncias extremas absolutas.

Determine a distância, em centímetros, do centro da esfera ao tampo da mesa na posição de equilíbrio da mola.

2. Na segunda experiência, analisou-se o arrefecimento da água colocada num recipiente.

Num certo instante, colocou-se um sensor no recipiente. A partir desse instante, o sensor foi registando a temperatura da água ao longo do tempo.

A temperatura da água, G, em graus Celsius $(^{\circ}\mathrm{C})$, em função do tempo, t, em minutos, decorrido desde o instante em que se colocou o sensor no recipiente, é dada, para um certo número real k, por

$$G(t) = 15 + 80e^{-kt} \quad , \quad \text{com} \ \ t \geq 0$$

2.1. Determine a temperatura da água no instante em que se colocou o sensor no recipiente.

2.2. Decorridos 2 minutos desde o instante inicial, a temperatura da água era $70\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Determine a temperatura da água decorridos 10 minutos desde o instante inicial.

Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Admita que a altura, em centímetros, dos alunos presentes nessa aula segue uma distribuição normal de valor médio $162\ \mathrm{cm}$ e desvio padrão $8\ \mathrm{cm}$.

Qual é a probabilidade de um desses alunos, escolhido ao acaso, ter uma altura inferior a $170\ \mathrm{cm}$ ou ter uma altura superior a $178\ \mathrm{cm}$?

Na sua resposta, utilize valores de probabilidade da distribuição normal constantes no formulário.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO II

Duas caixas, A e B, têm algumas bolas indistinguíveis ao tato.

1. Cada bola da caixa A está numerada com um número natural maior do que 1 .

Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, duas bolas da caixa A, repondo-se a primeira bola antes de se retirar a segunda.

Seja X a variável aleatória «produto dos números das duas bolas retiradas da caixa A», cuja tabela de distribuição de probabilidades se apresenta a seguir.

x_i	4	6	9
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Qual é a probabilidade de os números das duas bolas retiradas da caixa A serem iguais?

Justifique a sua resposta.

Apresente o resultado na forma de fração.

2. A caixa B tem 20 bolas.

Admita que, nessa caixa, se poderiam colocar, repetidas vezes, mais bolas: 3 bolas na primeira vez, 6 bolas na segunda vez, 12 bolas na terceira vez, e assim sucessivamente, duplicando sempre o número de bolas colocadas.

2.1. Quantas bolas se colocariam na caixa B na décima vez?

Justifique a sua resposta.

2.2. Determine o número total de bolas que ficariam na caixa B imediatamente após terem sido colocadas as bolas da décima quinta vez.

GRUPO III

O Sr. Ferreira dedica-se à agricultura e à aquariofilia.

1. O Sr. Ferreira tem um terreno agrícola que vai arrendar ao Sr. Lopes e ao Sr. Santos.

O terreno tem 13 hectares destinados ao cultivo de batata e 44 hectares destinados ao cultivo de milho.

O Sr. Lopes e o Sr. Santos vão cultivar o terreno do Sr. Ferreira, ou uma parte dele.

Ficou acordado que o Sr. Lopes vai:

- cultivar, pelo menos, 3 hectares de batata;
- destinar ao cultivo de milho o quíntuplo da área a destinar ao cultivo de batata;
- pagar 70 euros por cada hectare de terreno que cultivar.

Ficou também acordado que o Sr. Santos vai:

- cultivar, pelo menos, 2 hectares de batata;
- destinar ao cultivo de milho o dobro da área a destinar ao cultivo de batata;
- pagar 60 euros por cada hectare de terreno que cultivar.

O Sr. Ferreira pretende receber a maior renda possível, respeitando o que foi acordado.

Seja x o número de hectares de terreno a destinar ao cultivo de batata pelo Sr. Lopes e seja y o número de hectares de terreno a destinar ao cultivo de batata pelo Sr. Santos.

1.1. Justifique que a renda, L, em euros, a receber pelo Sr. Ferreira é dada, em função de x e de y, por

$$L(x, y) = 420x + 180y$$

1.2. Que área do terreno deve ser destinada ao cultivo de batata pelo Sr. Lopes e que área do terreno deve ser destinada ao cultivo de batata pelo Sr. Santos para que, respeitando-se o acordo, a renda recebida pelo Sr. Ferreira seja máxima?

Na sua resposta, apresente:

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– a solução do problema.

2. O Sr. Ferreira vai construir um aquário de vidro, idêntico ao da fotografia da Figura 2, com a forma de um prisma quadrangular regular.

Figura 2

2.1. No estudo que fez para decidir quais seriam as dimensões do aquário, o Sr. Ferreira representou essas dimensões, em centímetros, por x e por y, tal como se ilustra no esquema da Figura 3.

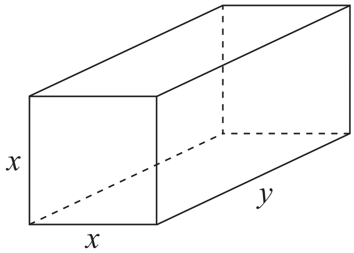

Figura 3

Depois de montar os vidros, o Sr. Ferreira vai reforçar exteriormente as **doze** arestas do aquário com cantoneiras, que serão coladas umas às outras sem que haja qualquer sobreposição entre elas, tal como se ilustra na Figura 4.

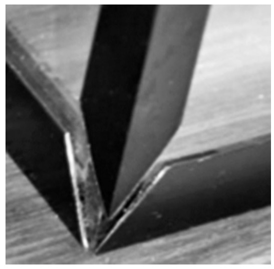

Figura 4

Para isso, dispõe de uma cantoneira com 480 cm de comprimento, que cortará de acordo com as dimensões das arestas. A cantoneira vai ser utilizada na totalidade e sem qualquer desperdício do seu comprimento.

Resolva os itens seguintes, considerando desprezável a espessura do vidro do aquário, e considerando para base do aquário um retângulo de dimensões x e y.

2.1.1. Mostre que a área, A, em centímetros quadrados, da base do aquário pode ser dada, em função de x, com $x \in]0, 60[$, por

$$A(x) = 120x - 2x^2$$

2.1.2. Determine os valores de x e de y para os quais se construiria o aquário com a base de área máxima.

2.2. Considere, agora, que o Sr. Ferreira construiu o aquário com $64\,000 \text{ cm}^3$ de volume.

Para encher o aquário de água, o Sr. Ferreira usou um balde cilíndrico com 22 cm de diâmetro e 15 cm de altura, que foi enchendo de água e despejando no aquário até este ficar cheio.

Determine quantas vezes o Sr. Ferreira encheu o balde de água.

Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados às unidades.

Na sua resolução, considere desprezável a espessura do balde.

GRUPO IV

O departamento comercial de uma empresa está a criar um logotipo para uma campanha publicitária.

Uma das componentes deste logotipo é um quadrado dividido em duas regiões, uma das quais sombreada, como se ilustra na Figura 5.

O desenhador que construiu este logotipo começou por elaborar o esquema que se reproduz na Figura 6.

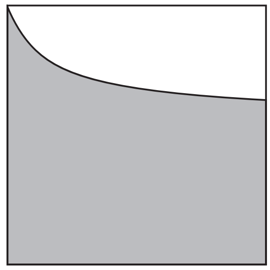

Figura 5

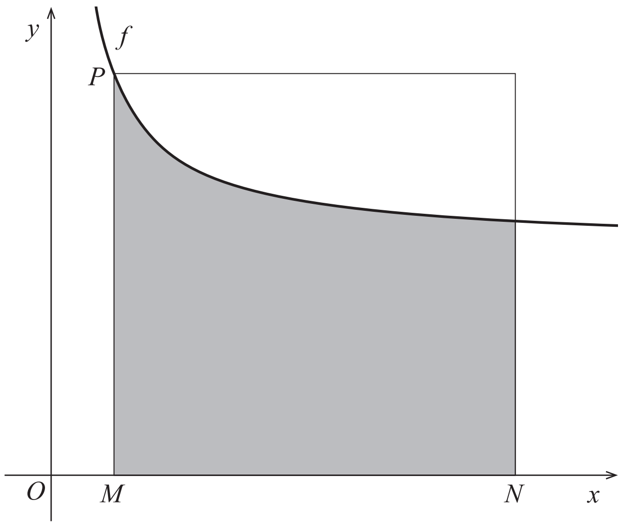

Figura 6

Nesta figura, está representada, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy, parte do gráfico da função f, definida por

$$f(x) = \frac{5}{x} + 5 \quad , \quad \text{com} \quad x > 0$$

Seja P um ponto de abcissa x que se desloca ao longo do gráfico de f.

Para cada posição do ponto P, considere:

- o ponto M, pertencente ao eixo Ox, de abcissa igual à do ponto P;
- o ponto N, pertencente ao eixo Ox, de abcissa superior à do ponto P, tal que $\overline{PM} = \overline{MN}$;
- o quadrado de diagonal $[PN]$.

A região do quadrado compreendida entre o eixo Ox e o gráfico da função f está representada a sombreado.

1. Sabe-se que a área, S, da região representada a sombreado na Figura 6 é dada, em função de x, por

$$S(x) = 5\ln\left(\frac{x^2+5x+5}{x^2}\right) + \frac{25}{x} + 25 \quad , \quad \text{com } x > 0$$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a abcissa do ponto N para a qual a **área da região sombreada** é igual a 50.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. À medida que a abcissa x do ponto P aumenta, a área da região sombreada na Figura 6 tende para 25.

Considere a função R que dá, para cada valor de x, a razão entre a área representada a sombreado na Figura 6 e a área do quadrado de diagonal $[PN]$.

O gráfico da função R tem uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, como se ilustra na Figura 7.

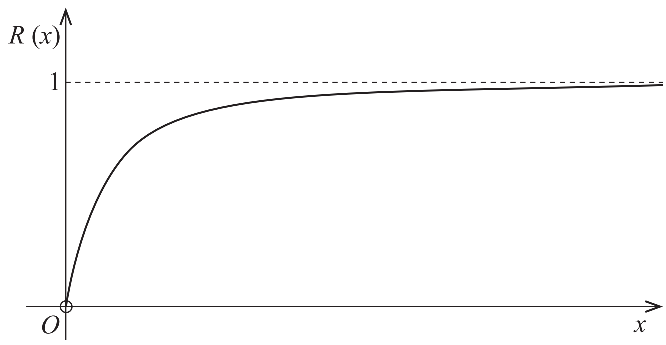

Figura 7

Qual é o valor para o qual tende a área da região **não sombreada** do quadrado de diagonal $[PN]$, à medida que a abcissa do ponto P vai aumentando?

Justifique a sua resposta.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><th rowspan="2">Grupo</th><th colspan="6">Item</th></tr>
<tr><td colspan="6">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td>3.</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>15</td><td>10</td><td>15</td><td>15</td><td>70</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>1.</td><td>2.1.</td><td>2.2.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>10</td><td>15</td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
<tr><td rowspan="2">III</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.1.1.</td><td>2.1.2.</td><td>2.2.</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>20</td><td>15</td><td>10</td><td>15</td><td>70</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IV</td><td>1.</td><td>2.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="6">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>